Theoretischer Hintergrund des Strategieunterrichts

Erwerb arithmetischer Kompetenzen

Auf Seite 10 haben wir den „Erwerb arithmetischer Kompetenzen mit dem Erlernen von Ableitungsstrategien“ kurz zusammengefasst. Im Folgenden werden wir nochmal näher auf den Erwerb arithmetischer Kompetenzen eingehen.

Wir strukturieren den Erwerb arithmetischer Kompetenzen auf dem Hintergrund des aktuellen Forschungsstandes der neurokognitiven Psychologie. Der Teilbereich „numerische Kognition“ beschäftigt sich mit Denkprozessen, die sich mit dem Verstehen und Verarbeiten von Zahlen und dem Ausführen von Rechenoperationen befassen.

Eine zentrale Erkenntnis: arithmetische Leistungen setzen sich aus zahlreichen Teilkomponenten zusammen, die sich im Laufe der Entwicklung in enger Wechselwirkung miteinander ausdifferenzieren.

Der fortschreitende Erwerb von Kompetenzen im Bereich des Rechnens basiert auf sich zunehmend erweiternden Kompetenzen im basisnumerischen Bereich.

Ein allgemein anerkanntes Modell der Entwicklung der Zahlenverarbeitung und des Rechnens, das uns u.a. eine Reihenfolge für die Bearbeitung einzelner Lerninhalte im Unterricht vorgeben könnte, ist derzeit nicht in Sicht. Vielleicht wird es auch nie ein allgemeingültiges Entwicklungsmodell geben, da sich Kinder diese Teilkomponenten individuell sehr unterschiedlich aneignen (Landerl, Vogel, Kaufmann 2022, 94). Was wir jedoch für unseren Unterricht nutzen: Dank neuerer Forschungserfolge der neurokognitiven Psychologie kennen wir jetzt die einzelnen Teilkomponenten der arithmetischen Verarbeitung. **Wir können nun zu erlernende arithmetische Kompetenzen formulieren und dem Lernweg der Kinder im Anfangsunterricht im Bereich der Zahlenverarbeitung und dem Erwerb basaler Rechenfertigkeiten eine Struktur geben** (→ S. 15).

Erwerb arithmetischer Kompetenzen im basisnumerischen Bereich

1. Zählen lernen und der Erwerb des Zahlwortsystems

Eine **kognitionspsychologische Analyse** beschreibt Herausforderungen beim Erlernen der Grundstrukturen unseres verbalen gesprochenen Zahlsystems:

- **a Die Zahlwörter zwischen 11 und 19 sind eine besondere Wortklasse:** „11“ heißt beispielsweise nicht ein-und-zehn (wie ein-und-zwanzig), „12“ nicht zwei-und-zehn, „13“ nicht drei-und-zehn usw. Eine weitere Besonderheit unseres Zahlwortsystems ist die Zehner-Einer-Inversion: Während wir von links nach rechts lesen, werden zweistellige Zahlen „rückwärts“, also von rechts nach links gelesen.
- **b Für jede Dekade gelten besondere Zahlwörter:** eins-zig → zehn; zwei-zig → zwan-zig; drei-zig → drei-ßig; vier-zig und fünf-zig sind regelmäßig; sechs-zig → sech-zig; sieben-zig → sieb-zig; acht-zig → ach-zig; neunzig ist wieder regelmäßig; zehn-zig ist hundert; …

Kinder sollen möglichst schnell die Besonderheiten unseres Zahlwortsystems erlernen und automatisieren, damit sie sich im Rechentraining auf das Erlernen des Rechnens, d. h. auf den Erwerb mathematischen und prozeduralen Verständnisses konzentrieren können. Daher üben wir das Zählen in jedem Mathetraining der ersten Schulmonate.

2. Zahl-Mengenzuordnung

Wir trainieren die Zahl-Mengenzuordnung immer schon bereits beim Zählen mit dem parallelen Zugriff auf eine Größenrepräsentation in der Zehner-Fünfer- oder Verdoppelungsstruktur .

Darüber hinaus üben wir diese im Trainingsfeld 2 regelmäßig mit verschiedenen Anschauungsmaterialien.

Sieben Ableitungsstrategien (→ S. 44) basieren auf Zahlentripeln (auf der Grundlage bestimmter strukturierter Mengen) oder auf der Kenntnis unseres Zahlsystems (verbunden mit der Vorstellung von Zahlenbildern). Zum Erlernen einzelner Strategien wählen wir die zum Zahlentripel oder Zahlenbild passende strukturierte Mengen aus und üben das simultane Erfassen der Teilmengen im Zahlentraining wie im „Blitzblicktraining“ auf S. 24 und 25 dargestellt.

3. Schreiben und Lesen von Zahlen und der Erwerb des Stellenwertsystems

Unser zehnerbasiertes Stellenwertsystem ist im Unterschied zu den gesprochenen / gehörten Zahlen ab der 11 regelmäßig, additiv und multiplikativ aufgebaut, z.B. 865 = 8mal100 - plus - 6mal10 - plus 5mal1.

Nachdem Kinder gelernt haben, mit dem Zehnersystemmaterial gelegte Zahlen in arabische Zahlen zu übersetzen, sie zu verschriftlichen, geht es im Unterricht darum, dass Kinder diesen Prozess des Umwandelns von einem Zahlenformat in ein anderes, auch „Transkodieren“ genannt, automatisieren.

Man spricht vom „semantischen Transkodieren“, wenn Kinder bei der Umwandlung gleichzeitig auch die Mächtigkeit von Zahlen erfassen können.

Rechnen setzt voraus, dass wir mit Zahlen kompetent umgehen können:

So sind die schnelle, sichere und fehlerfreie Umwandlung von einem Zahlenformat in ein anders, also von gesprochenen zu geschriebenen Zahlen und umgekehrt, ebenso wie das Zählen und das Zahlverständnis verbunden mit der automatisierten Zuordnung bzw. Vorstellung von Zahlen zu Mengen und umgekehrt die **Grundlage, um sich im Rechentraining auf das Erlernen des Rechnens konzentrieren zu können.**

Daher führen wir im Anfangsunterricht täglich ein Zahlentraining durch, um bei allen Kindern sichere basisnumerische Grundlagen schaffen zu können.

Danach folgt das Rechentraining:

Erwerb arithmetischer Kompetenzen im Bereich des Rechnens

In Rechentraining erwerben Kinder beim Rechnen mit Ableitungsstrategien arithmetische Kompetenzen in drei Teilbereichen:

1. Erwerb arithmetischen Faktenwissens

Unter arithmetischem Faktenwissen versteht man einfache Rechnungen, die wiederholt gerechnet und dabei mit ihren Ergebnissen assoziativ verknüpft werden. Als „arithmetische Fakten" werden sie im Langzeitgedächtnis gespeichert und mit der Zeit direkt aus diesem abgerufen. Unterschieden werden Multiplikationsfakten (Einmaleins) und Additionsfakten.

Bei **„Additionsfakten"** denken wir im Zusammenhang mit Ableitungsstrategien

- zum einen an **Zahlentripel** wie „6+4=10" oder „9+9=18", die Ausgangspunkte für das Rechnen mit Umkehr-, Nachbar- und Analogieaufgaben sind,
- zum anderen an **Zahlenbilder arabischer Zahlen (z.B. „14=10+4")**, die assoziativ gelernt und direkt aus dem Gedächtnis abgerufen werden können. Kinder können diese Zahlenbilder als **Ausgangspunkte für das Rechnen mit vier Ableitungsstrategien** verwenden (→ Trainingsfeld 5: die Strategien 4 bis 7)**.**

  Einfache **Zahlenbilder** (dargestellt mit dem ZSM, im Zwanzigerfeld oder als Würfelbilder, …), die Kinder spontan abrufen können, können im Langzeitgedächtnis gespeichert werden.

Gespeicherte Zahlentripel und Zahlenbilder sind das Eingangstor zum Rechnen mit Ableitungsstrategien, für viele Kinder die Möglichkeit nicht mehr zählend rechnen zu müssen.
(Anmerkung: Wenn Kinder intellektuell in der Lage sind, strukturierte Mengen zu erkennen und Anzahlen zu speichern, sollten sie Rechenstrategien erlernen können.)

2. Erwerb mathematischen Verständnisses (konzeptuelles Wissen)

Kinder erwerben im Anfangsunterricht mathematisches Verständnis für

a. **Rechenoperationen**, die auf Handlungserfahrungen beruhen: Addition und Subtraktion
b. **arithmetische Fakten:** Zahlensätze (Zahlentripel) und gespeicherte, simultan abrufbare Zahlenbilder arabischer Zahlen
c. **Gesetzmäßigkeiten – Rechengesetze:** „mathematische Prinzipien" zum Ableiten einer zweiten Aufgabe von einer ersten Aufgabe: z.B.
   - das Kommutativgesetz der Addition (Tauschaufgaben), z.B. 4+6=6+4
   - Assoziativgesetz: 8+ 4+2=4+(8+2)=4+10
   - Konstanzgesetz der Summe (gegenseitiges Verschieben): z.B. 9+6=(9+1)+(6-1)= 10+5=15
   - Distributivgesetz: 5x8 + 3x8 = 8x8; (später bei der Multiplikation)
d. **Zahlbeziehungen:** verdoppeln, halbieren, Zahlen im Verhältnis zur 10: „Zehnerfreunde", …
e. **Aufgabenbeziehungen**: Ableitungen von verwandten Aufgaben, das Nutzen von einfacheren Hilfsaufgaben, um schwerere Aufgaben lösen zu können: Nachbaraufgaben, Analogieaufgaben (→ Tabelle S. 27)
f. **eine richtige Abfolge von Lösungsschritten:** mathematisches Verständnis für Lösungswege (prozedurales Verständnis)
g. **Relationen:** ungefähre Vorstellung von Zahlengrößen, Schätzprozesse.

3. Erwerb prozeduralen Wissens (Erlernen von Rechenwegen)

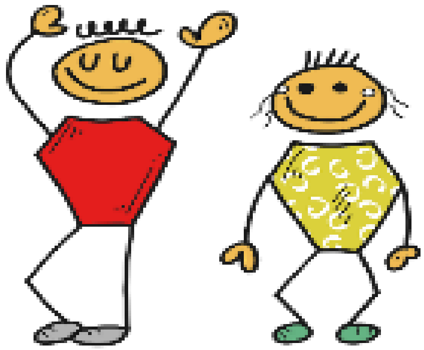
Kinder lernen Rechenwege, d.h. die richtige Abfolge von Lösungsschritten selbständig zu gehen

a. **bei der Zerlegung mehrstufiger, komplexer Aufgaben:** das Rechnen mit mehrstelligen Summanden, z.B. „15 + 35 = (15+5) + 30 = 20 + 30 =50"
b. **in operativen Aufgabenserien**
   – **Nachbaraufgaben:** „n+1-Prinzip": arithmetisches Faktum als Ausgangspunkt: 6+4=10 → 16+4=20 → 16+5=21;
   – **Analogieaufgaben:** 60+50=?.→ 6+4=10 → Analogie 60+40=100 → Nachbar 60+50=110
   – **bei schriftlichen Rechenverfahren:** z.B. bei der Multiplikation: der Weg zur „Sechs mal" immer über „10mal→Fünfmal→Sechsmal", z.B. 10x8=80 → 5x8=40 → 6x8=?

Theoretischer Hintergrund des Strategieunterrichts

Erwerb arithmetischer Kompetenzen mit dem Erlernen von Ableitungsstrategien am Beispiel des Zahlentripels „6+4=10“

Welche arithmetischen Kompetenzen können Kinder im Mathetraining erwerben?



1. **Zahlentraining**
   Simultane Mengenerfassung der Mengen 4, 6 und 10 und die Mengenerfassung weiterer Zahlen, die Teil der Aufgabestellungen sind: z.B. 11, 16, 20, 21, 40, 60, 100, 110… (Zwanzigerfeld, ZSM, …)

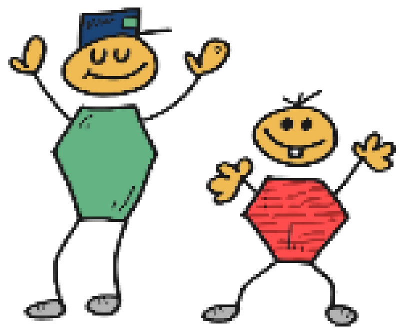
2. **Rechentraining**

   a **Arithmetisches Faktenwissen:** das Zahlentripel „6+4=10“ wird durch den häufigen Gebrauch auswendig gelernt. Dies ist das Eingangstor, um mit der Strategie „Zehnerfreunde“ ins Rechnen zu kommen.

   b **Mathematisches Verständnis**

   Kinder lernen

   - **das Operationsverständnis der Addition** und **Subtraktion**
   - die Zahlbeziehungen der 6, der 4 und der 10 über das das Zahlentripel „6+4=10“ mit seinen Umkehr- und Ergänzungsaufgaben „10-4=6“, „10-6=4“, 4+…=10“ und „6+ … =10“ **auf drei Abstraktionsebenen** kennen und verstehen.
   - **mathematisches Verständnis für Aufgabenbeziehungen: „Nachbar-beziehungen“**: wenn ein Summand um 1 oder 2 (10 oder 20, 100 oder 200 usw.) größer oder kleiner wird, wird die Summe um 1 oder 2 (10 oder 20, 100 oder 200 usw.) größer oder kleiner
   - **mathematisches Verständnis für Aufgabenbeziehungen**: **„Analogie-beziehungen additiv“** $a+b=c \rightarrow (a+10)+b=(a+b)+10=c+10$
   - **mathematisches Verständnis für Aufgabenbeziehungen**: **„Nachbarbeziehungen von Analogiebeziehungen“:** $a+b=c \rightarrow (a+10)+b=c+10$ oder $\rightarrow a+b=c \rightarrow (a+10)+(b+1) = (a+b)+10+1$
   - **mathematisches Verständnis für Aufgabenbeziehungen: „Analogiebeziehun-gen multiplikativ“**: $a+b=c \rightarrow 10a+10b=10c$ (Faktoren 10, 100, 1000, … sind möglich!)
   - **mathematisches Verständnis für Aufgaben-beziehungen: „Nachbarbeziehung additiv der Analogiebeziehung multiplikativ“**: $a+b=c \rightarrow 10a+10b=10c \rightarrow (10a)+(10b+10) = 10(a+b)+10=10c+10$
   - **mathematisches Verständnis für Zahl-zerlegungen** (Dekompensation): Zerlegung einer arabischen Zahl in ihre Stellenwerte, z.B. „16=10+6“
   - **mathematisches Verständnis für Rechen-gesetze:** Kommutativität der Addition, Konstanzgesetz der Summe, Assoziativität von Summen
   - **mathematisches Verständnis für Rechenwege**, d.h. eine richtige Abfolge von Lösungsschritten: Kinder lernen **Rechenwege** beim fortgesetzten Ableiten zu **verstehen**



   c **Prozedurales Wissen**

   Kinder lernen Rechenwege beim fortgesetzten Ableiten auswendig: sie lernen Rechenwege nach und nach selbstständig zu gehen

   - **6+5=?** → 6+4=10 → 6+5=?
   - **16+4=?** → 6+4=10 → 16+4=?
   - **16+5=?** →6+4=10 → 16+4=20 →16+5=?
   - **60+40=?** →**6+4=10** → 60+40=?
   - **60+50=?** → 6+4=10 → 60+40=100 → 60+50=?
   - **…**