

# Rechnen lernen im täglichen Mathetraining



## Einführung ins Mathetraining

### Regelmäßiges Trainieren:

#### Mathetraining in jeder Mathestunde

Ein zentrales Strukturelement für die Planung des Anfangsunterrichts im Konzept RECHNEN FÜR ALLE ist der **Aufbau von Unterrichtsstunden**. Diese sind immer mit einem täglichen Mathetraining verbunden.

Unterrichtsphasen:

- „**Hallo**“: Gruppe emotional und sozial einstimmen, ev. Rückblick; danach Einführung ins Thema, Transparenz der Lerninhalte und der Lernziele, ...
- **Tägliches Mathetraining** (10-20 Minuten)
  1. Zahlentraining (5-15 Minuten)
  2. Rechentraining (5-15 Minuten)
- **Üben unter Aufsicht** mit kontinuierlichem Feedback in der Regel nach dem Mathetraining (10-20 Minuten)
- **Strategiewahltrainings** oft mehrmals pro Woche
- **Weitere Inhalte des Bildungsplans**

Der Erwerb arithmetischer Kompetenzen mit dem Erlernen von Ableitungsstrategien im Rahmen der direkten Instruktion bedarf einer systematischen unterrichtlichen Vorgehensweise. **Um Kolleg:innen ein planvolles Vorgehen zu erleichtern**, haben wir alle Lernbereiche, in denen Kinder Fähigkeiten und Fertigkeiten zum Aufbau des Zahlverständnisses und zum Erlernen basaler Rechenoperationen erwerben, strukturiert in einer Übersicht dargestellt. Diese nutzen wir in unserem Konzept als „**Masterplan**“, auf dessen Grundlage Lehrer:innen ein **tägliches gemeinsame Mathetraining planen können**.

Gelernt werden Inhalte aus sechs „Trainingsfeldern“: drei im basisnumerischen Bereich (Zahlentraining), drei im numerischen Bereich (Rechentraining).

Auf der Grundlage der in den einzelnen Trainingsfeldern (→ S. 22-31) beschriebenen besonderen didaktischen Vorgehensweise, lernen Lehrer:innen passend zum Lernstand einzelner Kinder Lerninhalte auszuwählen und Mathetrainings so zu organisieren, dass sie in jedem Trainingsschwerpunkt Kindern mit besonderem Unterstützungsbedarf **überschaubare Lernsituationen** (→ S. 53, 74) und mathematisch talentierten Kindern **spannende Herausforderungen** bieten können.

## Das tägliche Mathetraining besteht aus einem Zahlen- und einem Rechentraining

Im **Zahlentraining** werden immer ein bis drei Trainingsschwerpunkte behandelt, z.B. „Zählen“ aus dem ersten Trainingsfeld und aus dem zweiten Trainingsfeld eine Blitzblickübung (Zahlwörtern strukturierte Mengen simultan zuordnen können und umgekehrt).

Im **Rechentraining konzentrieren wir uns immer nur auf einen Trainingsschwerpunkt**, den wir aus den Trainingsfeldern 4, 5 oder 6 aussuchen.

- Im **vierten Trainingsfeld** kommen wir immer über ein Zahlentripel (→ S. 26, 27) ins Rechnen. Zu Beginn des Anfangsunterrichts rechnen wir oft über längere Zeiträume auf der Grundlage eines Zahlentripels mit ein- und derselben Rechenstrategie, um das Konzept „Nachbaraufgabe“ und „Analogieaufgabe“ (→ S. 10 „Verständnis für Aufgabenbeziehungen“) mit allen Kindern zu erlernen. **Wir geben allen Kindern die Zeit, das Rechnen mit einer einzigen Ableitungsstrategie zu erlernen und eingehend im nach oben offenen Zahlenraum zu üben.** Kinder können erste Rechenfertigkeiten erwerben und diese Ableitungsstrategie in ihr Lösungsrepertoire übernehmen.
- Im **fünften Trainingsfeld** kommen wir im Mathetraining eines Tages **nur mit einer arabischen Zahl** ins Rechnen (→ S. 28, 29). Ausgehend von dieser „Starterzahl“, beispielsweise der „34“, lassen sich eine große Anzahl von Aufgabestellungen auf der Grundlage des Zahlbildungsprinzips mit bis zu vier Ableitungsstrategien bearbeiten, z.B.  $34 \pm 1$  (2, 3, 10, 20, 30, 4, 5, ...). Kinder müssen sich **nicht** bei jeder Aufgabe neue Zahlenbilder der jeweiligen Starterzahlen bildlich vorstellen. **Auf diese Weise können Kinder sich gezielt auf das Erlernen des Rechnens mit Ableitungsstrategien konzentrieren.**
- Im **sechsten Trainingsfeld** erlernen Kinder die Rechen-technik **„Mit der Kraft der 5 über die 10“** (→ S. 31). Kinder haben damit einen „**Plan B**“, der helfen kann, wenn ihnen mal keine Ableitungsstrategie zum Lösen einer Aufgabe in konkreten Rechensituationen einfällt.

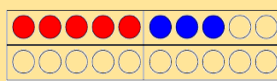
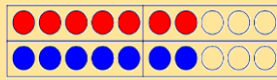
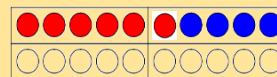
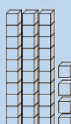
Beim Training in den Trainingsfeldern 4, 5 und 6 **kommen wir parallel über die Anwendung von Rechengesetzen ins Rechnen**: diese lassen sich gut über die ikonische und handelnde Ebene erarbeiten und werden von uns regelmäßig immer wieder thematisiert.



# „Masterplan“ zum Aufbau des Zahlverständnisses und zum Erlernen des Rechnens mit Ableitungsstrategien

Grundlage: Erwerb arithmetischer Kompetenzen mit dem Erlernen von Ableitungsstrategien (Seite 10)

| Zahlentraining | Trainingsfeld |                                | Trainingsschwerpunkte                                                                                                                |
|----------------|---------------|--------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                | 1             | Zählen / Zahlwortsystem        | Besonderheiten unseres Zahlwortsystems / Zählen in Strukturen / Zählen mit gleichzeitiger Mengenerfassung (→ S. 22, 23)              |
|                | 2             | Zahl-Mengen-Zuordnung          | Zahlwörtern strukturierte Mengen zuordnen bzw. <b>simultan</b> zuordnen können und umgekehrt (→ S. 24, 25)                           |
|                | 3             | Lesen und Schreiben von Zahlen | Von der Zahldarstellung zum Schreiben von Zahlen / Stellenwertsystem / Lesen von Zahlen mit Aktivierung der Zahlensemantik (→ S. 25) |

| Rechenttraining | Trainingsfeld |                                                                                                                                                               | Trainingsschwerpunkte                                                                                                                                                                                                                                                    |              | 11 Lösungsstrategien grün markiert                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                             |
|-----------------|---------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                 | 4             | <b>Ins Rechnen kommen</b><br>über Zahlentripel der Form $a+b=c$<br><br>Ableitungen erfolgen über Nachbar- und Analogieaufgaben<br>(→ S. 26, 27)               | 1                                                                                                                                                                                                                                                                        | $5 + 2 = 7$  | z.B. Trainingsschwerpunkt 2: „Starke 5“<br>                                                                                                                                                                        | Der Gebrauch verschiedener Lösungsstrategien aus den Trainingsfeldern 4, 5 und 6 erfolgt häufig in Verbindung mit der Anwendung von Rechengesetzen (→S.45): |
|                 |               |                                                                                                                                                               | 2                                                                                                                                                                                                                                                                        | $5 + 3 = 8$  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                             |
|                 |               |                                                                                                                                                               | 3                                                                                                                                                                                                                                                                        | $5 + 4 = 9$  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                             |
|                 |               |                                                                                                                                                               | 4                                                                                                                                                                                                                                                                        | $6 + 6 = 12$ | z.B. Trainingsschwerpunkt 5: „Verdoppeln und Halbieren“<br>                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                             |
|                 |               |                                                                                                                                                               | 5                                                                                                                                                                                                                                                                        | $7 + 7 = 14$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                             |
|                 |               |                                                                                                                                                               | 6                                                                                                                                                                                                                                                                        | $8 + 8 = 16$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                             |
|                 |               |                                                                                                                                                               | 7                                                                                                                                                                                                                                                                        | $9 + 9 = 18$ | z.B. Trainingsschwerpunkt 8: „Zehnerfreunde“<br>                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                             |
|                 |               |                                                                                                                                                               | 8                                                                                                                                                                                                                                                                        | $6 + 4 = 10$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                             |
|                 |               |                                                                                                                                                               | 9                                                                                                                                                                                                                                                                        | $7 + 3 = 10$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                             |
|                 |               |                                                                                                                                                               | 10                                                                                                                                                                                                                                                                       | $8 + 2 = 10$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                             |
|                 | 5             | <b>Ins Rechnen kommen</b><br>über die Vorstellung des Zahlenbildes einer arabischen Zahl<br><br>Ableitungen mit vier Ableitungsstrategien<br>(→ S. 28 bis 30) | Eine arabische Zahl bzw. die Vorstellung ihres Zahlenbildes ist immer Ausgangspunkt aller Aufgabenstellungen in einer Trainingseinheit:<br>z.B. „14“, oder „34“, „42“, „124“, ...<br> |              | Arabische Zahl als Zahlentripel $a+b=c$ , z.B. $30+4=34$ : das Ableiten von Aufgaben erfolgt wie im Trainingsfeld 4!                                                                                                                                                                                                                                                                    | Kommutativgesetz: „Tauschaufgaben“<br><br>Assoziativgesetz: „Zahl Zerlegen“                                                                                 |
|                 |               |                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                          |              | Arabische Zahl als „Starterzahl“ zum Rechnen mit vier Ableitungsstrategien, z.B. „34“: <ul style="list-style-type: none"><li>• „Um eins (...) mehr oder weniger“ <math>34 \pm 1(2)</math></li><li>• „Rechnen mit der 10, ...“ <math>34 \pm 10(20)</math></li><li>• „8er-9er-Trick“ <math>34 \pm 10(9,8,11,12)</math></li><li>• „Fast alles Abräumen“ <math>34 - 33(32)</math></li></ul> |                                                                                                                                                             |
|                 | 6             | <b>Ins Rechnen kommen</b><br>über eine Rechentechnik<br><br>Zehnerübergang mit der Fünferzerlegung zweier Zahlen (→ S. 31)                                    | In Trainingseinheiten wird die Anwendung der Rechentechnik mit verschiedenen Aufgabenstellungen geübt:<br><br>z.B. $8+8 = (5+3)+(5+3) = 5+3+5+3 = (5+5)+(3+3) = 10+6=16$                                                                                                 |              | Rechentechnik:<br>„Mit der Kraft der 5 über die 10“<br><br>1. 14 Aufgaben im Zwanzigerraum<br>( $5+6=?$ , $6+6=?$ , $5+7=?$ , $6+7=?$ , $7+7=?$ , $5+8=?$ , $6+8=?$ , $7+8=?$ , $8+8=?$ , ...)<br><br>2. Analogieaufgaben z.B. $17+8=$ , $70+80=$ , $7000+8000=$ , $2467+8=$ , $2470+80=$ , ...                                                                                         |                                                                                                                                                             |

# Rechnen lernen im täglichen Mathetraining

## Individualisierung leicht gemacht:

### Wie Lehrer:innen allen Kindern im Mathetraining individuelle Lernangebote machen können

Der Erfolg des in RECHNEN FÜR ALLE beschriebenen Unterrichtskonzepts beruht darauf, dass wir jedem Kind Tag für Tag eine passgenaue Förderung auf seinem individuellen Leistungsniveau in verschiedenen Lernbereichen bieten können.

Mit einem differenzierenden bzw. individualisierenden Unterricht ist normalerweise verbunden, dass Lehrer:innen genau wissen, wo jedes Kind in ganz unterschiedlichen Lernprozessen steht und darauf aufbauend sich für Kindergruppen und einzelne Kinder eine passende Förderung überlegen. Konkret bedeutet das oft, dass Lehrer:innen nicht nur jeden Tag die Arbeitsergebnisse aller Kinder korrigieren und darauf aufbauend Kindern neue Arbeitsmaterialien zur Verfügung stellen müssen, es bedeutet auch, dass Lehrer:innen im Unterricht versuchen müssen, jedem Kind bzw. verschiedenen Kindergruppen Inhalte zu erklären bzw. zu üben. Das ist in einer Schulklasse eine Herausforderung. Auch wir haben lange versucht, auf diese Art und Weise Kindern mit sehr heterogenen Lernvoraussetzungen im Anfangsunterricht gerecht zu werden. Das war mit einem oft sehr großen Arbeitsaufwand in der Vor- und Nachbereitung des Unterrichts verbunden.

**Irgendwann haben wir einen großen Schritt nach vorne gemacht, indem wir die Differenzierung bzw. Individualisierung über die Unterrichtsmethode „Training“ neu organisiert haben.**

Heute gelingt es uns, jedem Kind ohne den oben beschriebenen hohen Arbeitsaufwand in jedem Trainingsschwerpunkt individuelle Lernangebote zu machen. Zudem können wir auf diese Weise die mit einem differenzierenden bzw. individualisierenden Unterricht oft verbundenen unproduktiven Wartezeiten in „Warteschlangen“ am Pult der Lehrer:in vermeiden.

### Differenzierung im Mathetraining

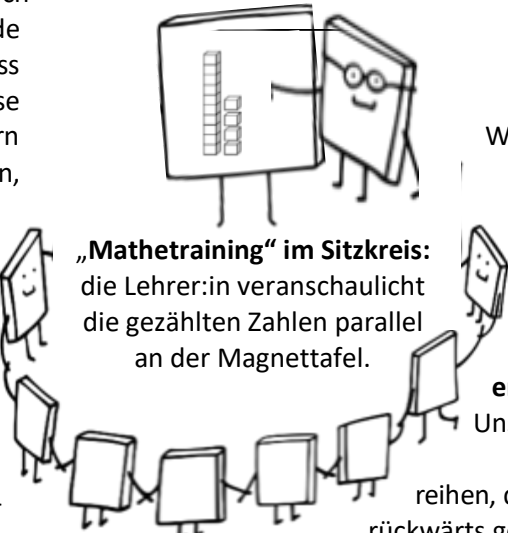
Wir bearbeiten in den Trainingsfeldern 1 bis 5 **in jedem Trainingsschwerpunkt immer eine Serie von Aufgaben.**

Die Differenzierung in einzelnen Trainingsschwerpunkten erfolgt dabei **zunächst über zunehmend komplexe Aufgabestellungen:**

- Mit den ersten Aufgaben in einem Trainingsschwerpunkt (bzw. Übungsthema) orientieren wir uns immer am Lernstand der in diesem Lernthema aktuell leistungsschwächsten Kinder: das können Kinder sein,

die in vielen schulischen Lernbereichen oder nur beim Rechnen einen höheren Förderbedarf haben oder Kinder, die neu in der Klasse sind. Das können „DaZ-Kinder“ sein oder Kinder, die vielleicht wegen Krankheit im Unterricht gefehlt haben oder eben aus irgendeinem Grund diesen Lerninhalt noch nicht gelernt haben oder Fertigkeiten noch nicht sicher anwenden können. Diese Kinder stehen bei den ersten Aufgaben besonders im Fokus der Lehrer:in.

- Danach bieten wir sukzessive Aufgaben mit höherem Schwierigkeitsgrad an.
- Zum Schluss führen wir spätestens mit der letzten Übungsaufgabe die leistungsstärksten Kinder an ihre individuellen Leistungsgrenzen.



„Mathetraining“ im Sitzkreis: die Lehrer:in veranschaulicht die gezählten Zahlen parallel an der Magnettafel.

### Individuelle Förderung im Zahlentraining

Wir veranschaulichen unsere Vorgehensweise im Zahlentraining (Trainingsfelder 1 bis 3) anhand eines Beispiels aus dem ersten Trainingsfeld. Unsere Aufgabenserie besteht aus Zahlenreihen, die jeweils vor- und rückwärts gesprochen werden.

1. Zählen in Einerschritten bis 35
2. Zählen in Zehnerschritten bis ca. 150
3. Zählen in Hunderterschritten bis 1500
4. Zählen in Hunderterschritten mit Startzahlen, ev. über den Tausender, ev. Zählaufgaben „+100“ (50, 150, 250, ...) usw.

**Um die Leistungsstände einzelner Kinder zu eruieren,** geben wir, nachdem wir Zahlenreihen in den ersten Schulwochen oft gemeinsam (unisono) gesprochen haben, einzelnen Kindern oder Kindergruppen die Gelegenheit zu zeigen, was sie können: Kinder dürfen alleine, zu zweit (ev. abwechselnd sprechen) oder als Gruppe eine Zahlenreihe (oder Abschnitt einer Zahlenreihe) vortragen. Dabei kann die Lehrer:in einzelne Kinder gezielt beobachten.

**Die Lehrer:in kann auf dieser Grundlage**

- mit einzelnen Kindern bzw. Gruppen **einzelne Passagen intensiv trainieren** (z.B. „elf, zwölf, dreizehn“)
- **die rechenstärksten Kinder mit weiteren Aufgaben** (oben in der vierten Aufgabe skizziert) **an die Grenzen ihrer Leistungsfähigkeit führen.**

## Individuelle Förderung im Rechentraining beim Erlernen von Ableitungsstrategien

Im Rechentraining erlernen wir in den Trainingsfeldern 4 und 5 mit Kindern zehn Ableitungsstrategien.

**Die Differenzierung bzw. Individualisierung der Lernangebote** erfolgt in jedem einzelnen Trainingsschwerpunkt über eine **Serie von Aufgaben mit zunehmenden Schwierigkeitsgrad, wobei jede einzelne Aufgabe mehrfach gestellt wird** und dabei immer mehr Hilfestellungen auf bildlicher und handelnder Ebene gegeben werden.

Mit der Differenzierung über zunehmend komplexe Aufgabestellungen in unterschiedlich anspruchsvollen Aufgabenformaten ergeben sich Tag für Tag in einem Trainingsschwerpunkt für alle Kinder einer Klasse eine große Anzahl unterschiedlicher Anknüpfungspunkte für individuelles Lernen. Einzelne Kinder lernen in aufeinanderfolgenden Trainings Aufgabestellungen auf immer höheren Abstraktionsstufen zu verstehen und zu lösen. Wir verdeutlichen dies nun anhand zweier Unterrichtsbeispiele aus dem fünften und vierten Trainingsfeld.

### Beispiel 1: Individuelle Förderung im fünften Trainingsfeld – Schwerpunkt: Individuelle Förderung

Wir veranschaulichen unsere Vorgehensweise im fünften Trainingsfeld (→ S. 28, 29) mit einer **Serie von Ableitungsaufgaben** mit der Starterzahl „14“ (ev. ein Mathetraining im ersten Monat des Anfangsunterrichts):

- $14 \pm 1(2)$ : Aufgaben 1 bis 4
- $14 + 10$  (20, 100, 200, 1000): Aufgaben 5 bis 9
- $14 - 10$ : Aufgabe 10
- $14 - 14 = 0 \rightarrow 14 - 13 = ?$  und  $14 - 12 = ?$ : Aufgaben 11 und 12

Die Lehrer:in steht an der Magnettafel (Bild Vorderseite) und stellt nacheinander die 12 Aufgaben. Sie stellt jede Aufgabe mehrfach und gibt dabei sukzessive so lange immer weitere Hilfen auf bildlicher und ev. zum Schluss auf handelnder Ebene, bis alle Kinder eine Lösungsidee signalisieren. Diese Vorgehensweise bezeichnen wir als **„Hilfeleiter“**, beispielsweise für die Aufgabe „ $14 + 1 = ?$ “

0. L: „Was ist  $14$  plus  $1$ ?“ (sprachlich-abstrakte Ebene, keine Hilfen der Lehrer:in)
1. L: „Was ist  $14$  plus  $1$ ?“ Während die L. „plus  $1$ “ sagt, nimmt sie einen Einerwürfel in die linke Hand, zeigt diesen den Kindern und sagt: „plus  $1$ “
2. L: „Was ist  $14$  plus  $1$ ?“ - die L. nimmt den Einerwürfel in die rechte Hand und führt ihn zur Magnettafel, zeigt den Würfel und spricht: „plus  $1$ “
3. L: „Was ist  $14$  plus  $1$ ?“ – während die L. den Einerwürfel nahe an die „14“ auf der Magnettafel führt
4. L: „Was ist  $14$  plus  $1$ ?“ Zum Schluss lösen wir die Aufgabe gemeinsam auf handelnder Ebene.

Sobald Kinder im Verlauf der wiederholten Aufgabestellungen eine Lösungsidee haben, stehen sie auf (oder geben ein anderes verabredetes, sichtbares Zeichen).

**Die Lehrer:in stellt die Aufgabe immer wieder und gibt entlang der Hilfeleiter so lange weitere Hilfen, bis alle Kinder stehen und damit eine Lösungsidee signalisieren.**

Durch diese Art der Aktivierung sehen wir, wo Kinder im Lernprozess stehen und können sie unterstützen. Nach der Aufgabenlösung wiederholen wir Aufgaben oft schon innerhalb einer Minute: Kinder realisieren, dass sie diese Aufgabe jetzt schon spontan auf symbolischer Ebene lösen können oder weniger Hilfen zur Lösung benötigen.

**Wir bieten innerhalb einer Aufgabenserie**

- mit zunehmend schwierigeren Aufgabestellungen
- und der wiederholten Präsentation jeder Aufgabe mit einer zunehmenden Anzahl von Hilfestellungen entlang einer „Hilfeleiter“

**allen Kindern auf ihrem individuellen Leistungsstand viele Anknüpfungspunkte für individuelles Lernen.**

Da wir jede Aufgabe wie oben ausgeführt über verschiedene Abstraktionsebenen und Hilfestellungen fünfmal (**viermal mit Hilfen**) stellen, bieten wir den Kindern **allein in diesem Trainingsschwerpunkt mit zwölf Aufgaben insgesamt 48 Anknüpfungspunkte um Neues zu lernen:**

- **mathematisch talentierte Kinder** können vielleicht schon die ersten zehn Aufgaben spontan auf symbolischer Ebene lösen (sind hier bereits in der Automatisierungsphase), brauchen nur bei den letzten beiden Aufgaben Hilfen der Lehrer:in und haben damit **zwei Anknüpfungspunkte um Neues zu lernen.**
- **die aktuell leistungsschwächsten Kinder** können vielleicht die ersten fünf Aufgaben mit einigen Hilfen lösen, dann weitere fünf Aufgaben noch auf handelnder Ebene nachvollziehen und die letzten zwei Aufgaben selbst auf handelnder Ebene noch nicht erfassen. Sie hatten somit in diesem Schwerpunkt **zehn Anknüpfungspunkte um Neues zu lernen.**
- **Kinder aus dem Bereich des Durchschnitts** der Klasse konnten vielleicht schon zwei Aufgaben spontan lösen, alle anderen mit einer unterschiedlichen Anzahl von Hilfen lösen und hatten damit **zehn Anknüpfungspunkte um Neues zu lernen.**

Da wir in jedem Mathetraining ein bis drei Schwerpunkte im Zahlentraining und einen im Rechentraining auf diese Weise bearbeiten, bieten wir jedem Kind in unterschiedlichen Lernprozessen **Tag für Tag ein Eldorado von Anknüpfungspunkten für individuelles Lernen:**

**Kinder brauchen von Tag zu Tag weniger Hilfestellungen, bis sie am Ende in der Lage sind, jede Aufgabe auf symbolisch-sprachlicher Ebene zu lösen** (→ S. 57, 58).



# Rechnen lernen im täglichen Mathetraining

## Beispiel 2: Individuelle Förderung im vierten Trainingsfeld: „7+7=?“ - **Schwerpunkt: Organisation von Mathetrainings**

Kinder erlernen im vierten Trainingsfeld das mathematische Verständnis von Nachbar- und Analogiebeziehungen (→ S. 28, 29) in unterschiedlich komplexen Rechenzusammenhängen. Wir veranschaulichen unsere Vorgehensweise im Mathetraining im Trainingsschwerpunkt „7+7=14“ anhand einer **Aufgabenserie mit fünf Aufgabestellungen** in der ersten Trainingswoche.

1. Das Zahlentripel „7+7=14“ verstehen
2. Umkehraufgabe: „7+7=14“ → 14-7=?
3. Erste Ableitungen: „7+7=14 → 7+8=?“
4. Erste Ableitungen: „7+7=14 → 7+6=?“
5. Erste Ableitungen: „7+7=14 → 17+7=?“

Wir präsentieren jede der fünf Aufgaben zunächst auf symbolischer Ebene und geben danach so lange weitere Hilfestellungen über eine „**Hilfeleiter**“ (→ S. 57 und 58), bis alle Kinder den mathematischen Inhalt der Aufgabe erfassen und eine Lösungsidee entwickeln können.

### Welche diagnostischen Daten werden unterrichts begleitend erhoben?

Wir eruieren im Rahmen der direkten Instruktion im Unterricht permanent, wo Kinder im Lernprozess stehen: wir fragen bei jeder der fünf Aufgaben bei jeder einzelnen Aufgabeformulierung, ob Kinder eine Lösungsidee haben: „Wer eine Idee hat, steht auf“. Wir fragen so lange entlang unserer „Hilfeleiter“, bis alle Kinder eine Lösungsidee signalisieren bzw. stehen.

Durch diese Form der Aktivierung sehen wir nach und nach, wo jedes Kind im bei der Lösung jeder einzelnen Aufgabe im Lernprozess steht.

Damit haben wir wichtige „diagnostische Informationen“, um Kinder im aktuellen Lernprozess zu unterstützen. **Einen Teil der Informationen brauchen wir jedoch auch, um das nächste Mathetraining zu planen:**

1. **Die erste Aufgabe des nächsten Rechentrainings:**  
Wenn alle Kinder eine der Aufgaben im aktuellen Mathetraining spontan auf symbolischer Ebene lösen können, können wir diese Aufgabe bald **weglassen** (um diese nach einigen Tagen ev. leicht verändert zu wiederholen).
2. **Die letzte Aufgabe des nächsten Rechentrainings:**  
Konnte das rechenstärkste Kind bereits die „ersten Ableitungen“ (Aufgaben „3, 4 und 5“) spontan ohne Hilfen lösen, sollte die Lehrer:in **weitere Aufgaben im aktuellen Mathetraining anfügen**, z.B. Ableitungen wie „7+7=14 → 70+70=?“ und „70+70=140 → 70+80=?“ und ev. „70+70=140“ → 170+70=? usw.

### 3. Leistungsschwache Kinder:

Lehrer:innen finden schon nach den ersten Mathetrainings heraus, welche Kinder langsamer lernen: diesen Kindern sollten sie bei bestimmten Aufgabestellungen **besondere Aufmerksamkeit schenken**, ev. Kinder gezielt während des Trainings unterstützen und Aufgaben mit weniger Hilfen wiederholen.

### 4. Leistungsstarke Kinder:

Lehrer:innen kennen nach kurzer Zeit die Kinder, die besonders schnell lernen. Sie sollten diese Kinder besonders bei den letzten Aufgaben einer Aufgabenserie im Fokus haben, um diese wirklich zu herauszufordern und **Tag für Tag wirklich an die Grenzen ihrer Leistungsfähigkeit** zu bringen.

**Geübte Mathetrainer:innen müssen sich im Wesentlichen nur die unter den Punkten 1 bis 4 beschriebenen Daten merken um einen individualisierenden Unterricht im nächsten Mathetraining machen zu können.**

## Versierte Mathetrainer:innen

**Versierte Mathetrainer:innen** kennen aus unzähligen Mathetrainings die Stärken und Schwächen ihrer Kinder in Bezug auf ihr Lernvermögen und ihre Kenntnisse in einzelnen Bereichen. Sie wissen wie sie in den sechs Trainingsfeldern ein Gruppentraining gestalten können und können dabei die Aufgabenschwierigkeit in verschiedenen Trainingsschwerpunkten flexibel an das Leistungsvermögen von Kindern anpassen. Sie machen mit dem Mathetraining einen differenzierenden bzw. individualisierenden Unterricht und können während des Trainings sehr intensiv auf einzelne Kinder der Gruppe eingehen und dabei vieles auch situativ entscheiden.

**Die Hauptarbeit für einen guten, differenzierenden bzw. individualisierenden Unterricht in leistungsheterogenen Lerngruppen** leisten Lehrer:innen als geübte Mathetrainer:innen zum großen Teil im Unterricht selbst. **Es entfällt weitgehend die oft sehr zeitintensive Auswahl, Herstellung und Korrektur von Fördermaterialien.**

## „Neue Kinder“

**Kommen „neue Kinder“ in die Klasse**, müssen Lehrer:innen erfahrungsgemäß in verschiedenen Bereichen immer wieder „fast von vorne anfangen“, sei es beim Zählen, der Zahl-Mengen-Zuordnung oder beim Rechnen mit Ableitungen. Das bedeutet, dass wir in jedem Trainingsschwerpunkt erst mal wieder mit recht „leichten“ Übungen beginnen. Ganz wichtig ist, dass wir solche Situationen immer kommunizieren: **Wir kümmern uns um die „Neuen“** und erleben ihre Lernfortschritte ganz bewusst in der Gruppe. **Rechenschwächere Kinder erleben sich jetzt als „Profis“: sie realisieren, was sie schon können, sie dürfen sich in der „Helferrolle“ erleben!!!**

## Kommentierte Mathetrainingseinheiten

Teile des Unterrichts systematisch als „Training“ zu gestalten ist für Lehrer:innen eine neue Herausforderung. **Wir wollen die Hürden für das Erlernen der Methode möglichst niedrig halten** und erklären einzelne Merkmale unserer Vorgehensweise praxisnah anhand von Beispielen.

Bei der Trainingsplanerstellung für Mathetrainingseinheiten berücksichtigen Lehrer:innen

1. Beobachtungen im letzten Mathetraining
2. Lerninhalte der letzten Tage und Wochen, die sie durch Wiederholungen gerne „festigen“ und automatisieren möchte
3. weitere Inhalte auf der Grundlage des Masterplans

In die Beschreibung der Trainingseinheiten gehen Vorüberlegungen für die Planung, Beispiele möglicher Trainingsinhalte und an mehreren Stellen auch die wörtliche Wiedergabe von Trainingssequenzen ein.

Unterrichtsinhalte haben wir blau markiert, die wörtliche Wiedergabe von Unterrichtssequenzen

mit einer  gekennzeichnet.

### 1. Ein Mathetraining in den ersten Schulwochen

#### Zahlentraining

In den ersten Wochen des Anfangsunterrichts üben wir täglich das Zählen mit verschiedenen Zählaufgaben und danach im zweiten Trainingsfeld die Erfassung und die simultane Erfassung strukturierter Mengen. Auf dieser Grundlage wollen wir im folgenden Beispiel im Rechen-  
training im Trainingsfeld 5 ins Rechnen kommen.

#### Trainingsfeld 1: Zählen

Aus dem letzten Training wissen wir, dass einige Kinder noch Unsicherheiten beim Zählen der ersten Zahlwörter der zweiten Dekade (11, 12, 13 ...) haben.

- Zählen bis 15 mit der Startzahl 6 (vorwärts und rückwärts) mit paralleler Mengenveranschaulichung.

Wir arbeiten „fehlervermeidend“, indem wir den schwierigen Teil der Zahlenreihe (10, **11, 12, 13**) zuerst vorsprechen und dann von Kindern, die dabei noch Probleme haben, nachsprechen lassen. Wir lassen Kinder diese Sequenz mehrfach zu zweit, zu dritt (...), alleine vor der Klasse zählen.

Wir haben vor ein paar Tagen im Training begonnen, die Zehnerreihe vor- und rückwärts bis 150 zu zählen. Wir wiederholen die Zehnerreihe in diesem Training.

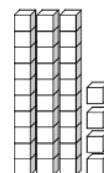
- 10, 20, 30, ... bis 150 und rückwärts

Kinder, die mit dieser Aufgabe unterfordert sind, dürfen sich jederzeit eine Augenbinde (→ S. 21 unten) anlegen: sie versuchen die Zehnerreihe mit Starterzahlen ohne zu zählen.

#### Trainingsfeld 2: Übung zur (simultanen) Mengen- erfassung der „34“ über eine „Hilfeleiter“

Die Lehrer:in heftet die Veranschaulichung der „34“ an die Magnettafel.

- L: „Wie heißt diese Zahl?“ - „Wer eine Idee hat, steht auf!“



Einige Kinder (signalisieren eine Lösungsidee. Die Lehrer:in gibt nun immer weitere Hilfen (vgl. „Hilfeleiter“ S. 17):

- Die Lehrer:in deutet auf die Einer und sagt: „Das sind ...“ und deutet auf die Zehner: „Das sind...“

Danach stehen weitere Kinder auf.

- Die Lehrer:in deutet auf die Einer und sagt: „Das sind ... vier“ und deutet auf die Zehner: „Das sind ... zehn, zwanzig, dreißig - wie könnte die Zahl heißen?“

Nach diesem zweiten Impuls stehen weitere Kinder auf.

- Die Lehrer:in deutet auf die Einer und sagt: „Das sind ... vier“ und deutet auf die Zehner: „Das sind... dreißig. Zusammen sind das vier... und .....“

Nach diesem dritten Impuls stehen weitere Kinder auf.

- Falls nötig wird der dritte Impuls nach einer kleinen Pause wiederholt, weitere Hilfen gegeben ev. auch auf handelter Ebene gelöst bis alle Kinder eine Lösungsidee signalisieren.

Für Kinder, die Hilfen bzw. viele Hilfen benötigen, ist es wichtig, die „34“ **in möglichst kurzen Zeitabständen so lange zu wiederholen, bis sie diese Zahl spontan ohne Hilfen erkennen können**. Danach müssen Wiederholungsschleifen in größer werdenden Zeitabständen zur Sicherung des Gelernten erfolgen.

#### Rechentraining mit der „34“ (Trainingsfeld 5)

Die Lehrer:in bearbeitet, immer ausgehend von der „34“, mit Kindern eine Serie von Aufgaben **auf drei Abstraktionsebenen entlang einer „Hilfeleiter“** (→ z.B. auf S. 17 „14+1=?“). Dauer ca. 5 bis 10 Minuten.

## Aufgabenserie mit der Startzahl „34“:

### 1. „Um eins (...) mehr oder weniger“ $34 \pm 1(2)$ :

„Wenn 34 plus 1 gleich 35 ist, was könnte dann 34 plus 2 sein?  $34+1=35 \rightarrow 34+2=?$ , dto. mit  $34-1(2)$ “

### Danach weitere Aufgaben (2, 3, 4, und 5):

„Wenn ... plus/minus ... gleich ... ist, was könnte dann ... plus/minus ... sein? Danach Hilfen über eine **Hilfeleiter**.“

### 2. „Rechnen mit der 10, ...“ $34 \pm 10(20)$

### 3. „8er-9er-Trick“ $34 \pm 10(9,8,11,12)$

### 4. „Fast alles Abräumen“ $34 - 33(32)$

### 5. Weitere Aufgaben über Nachbar- und Analogiebeziehungen: $34-4=30 \rightarrow 34-5=?$ oder $34-4=30 \rightarrow 34-14=?$ und dann $34-14=20 \rightarrow 34-15=?$ usw.

Die Lehrer:in kann aus der Aufgabenserie verschiedene Aufgaben weglassen: Wichtig ist, dass die Lehrer:in

- genau da mit der Serie beginnt, wo die Schwächsten im Lernprozess stehen
- und da endet, wo die rechenstärksten Kinder eine Aufgabestellung auf symbolischer Ebene noch nicht sicher ohne Veranschaulichungen lösen können.

**Die Lehrer:in wiederholt immer wieder Aufgaben und verdeckt teilweise die „34“ mit einem Tuch: Kinder sollen Aufgaben mit immer weniger Hilfen auf immer höheren Abstraktionsebenen zu verstehen und lösen!**

Nach dem Rechentraining folgt in der Regel ein angeleitetes Üben, z.B. das Kaiserspiel auf Seite 76 ff.: Beispiele für mögliche Würfelpläne im Trainingsfeld 5 zum „Zahlenbild der „34“ sind auf Seite 81 zu finden.

## 2. Ein Mathetraining in den ersten Schulmonaten

### Zahlentraining

#### Trainingsfeld 1: Zählen

Situation: Wir haben vor ein paar Tagen im Training die Zehnerreihe vor- und rückwärts gezählt. Nun wiederholen wir diesen Lerninhalt.

- Zuerst zählen wir von 150 bis 250 vor- und rückwärts. ... mit gleichzeitiger Visualisierung und Handlungsbegleitung durch die Lehrer:in,  $\rightarrow$  Bild S. 16).

Während die rechenstärksten Kinder versuchen die Zehnerreihe mit verschiedenen Startzahlen ohne Visualisierung auch mit Hunderterübergängen (vorwärts und rückwärts) zu zählen, können alle anderen Kinder die an der Magnettafel visualisierte Zahlenreihe im Sitzkreis verfolgen und die zählenden Kinder zu „kontrollieren“.

- Ev. Reihe: 155, 165, ... bis 255 und rückwärts

Falls das für einige Kinder bereits „zu leicht“ ist, beginnen wir mit den ersten Zahlen der **101-er-Reihe**:

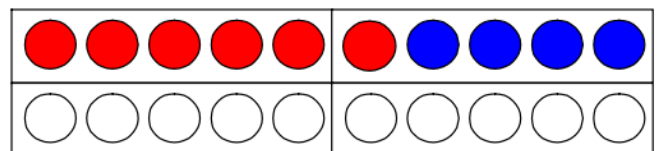
- **101, 202, 303, 404, ...** usw.; ev. auch die 102er-, 110er-, 111er-, 112er-, 201er-, ...-Reihe), vorwärts und rückwärts auf symbolischer Ebene zu zählen.

Die Lehrer:in befestigt die gesprochenen Zahlen parallel an der Magnettafel. Es ist möglich, dass einige mathematisch talentierte Kinder das Zählen der Reihen bereits auf verbal-symbolischer Ebene bewältigen können, daher fragt die Lehrer:in vor dem Zählen der 101-Reihe, ob Kinder auf Hilfen verzichten wollen, indem sie Augenbinden anlegen oder sich auf dem Stuhl herumdrehen wollen (blinzeln ist natürlich ausdrücklich erlaubt!).

### Trainingsfeld 2: Zahl-Mengen-Zuordnung

Die simultane Mengenerfassung der Mengen 4, 6 und 10 im Zahlentraining ist die Grundlage, um das Zahlentripel „ $6+4=10$ “, das später im Rechentraining im Mittelpunkt stehen wird, verstehen zu können.

- verschiedene Übungen um die einzelnen strukturierten Mengen mit Hilfe der optischen Anordnung als Ganzes - ein 6er, ein 4er – simultan erkennen zu können.
- Die erste Reihe des Zwanzigerfeldes mit der Zahl 10 verknüpfen bzw. wissen, dass 10 Plättchen in eine Reihe passen.



### Rechentraining

#### Trainingsschwerpunkt: „ $6+4=10$ “

Mit der simultanen Mengenerfassung der Mengen 4, 6 und 10 haben wir im Zahlentraining die Grundlage geschaffen, um das Zahlentripel  **$6+4=10$  als arithmetisches Faktum** auf der Basis mathematischen Verständnisses, hier dem Operationsverständnis der Addition, auf drei Abstraktionsebenen zu erfassen und durch häufigen Gebrauch **auswendig zu lernen**.

#### Hier eine mögliche „Hilfeleiter“:

- **L:** „Was ist  $6+4$ ? – Wer eine Idee hat, steht auf!“

Da das Rechnen mit Zahlentripeln der Form  $a+b=c$  für die Kindergruppe zu diesem Zeitpunkt noch relativ neu ist, haben nur wenige Kinder eine Lösungsidee.

- **Stummer Impuls:** die Lehrer:in zeigt das Zwanzigerfeld mit den strukturierten Mengen und stellt die

Frage nochmal – jetzt mit der ersten Unterstützung auf ikonischer Ebene. Weitere Kinder haben eine Lösungsidee.

- **L: „Die roten und blauen Plättchen, wie viele sind das zusammen?“** Weitere Kinder haben eine Lösungsidee.

- **L: Kreisende Handbewegung um das Zehnerfeld während sie spricht „Ein roter Sechser und ein blauer Vierer - wie viele Plättchen sind das zusammen?“** Fast alle Kinder stehen.

- **L: „Wie viele Plättchen sind das zusammen?“** Wir zählen die Plättchen: „1,2,... 8, 9, 10“.

- **L: „10 Plättchen - also was gibt 6 plus 4?“** Normalerweise stehen dann alle Kinder, die Lehrer:in fordert ein Kind, eine Kindergruppe oder alle Kinder auf, ihre Lösungsidee zu präsentieren.

Kindern wird die Aufgabe nach dem EIS-Prinzip auf drei Ebenen präsentiert, sie

- hören eine Aufgabe auf sprachlich-symbolischer Ebene: "Sechs plus vier gibt ..."
- sehen die Aufgabe parallel: farbige Plättchen im Zwanzigerfeld (ikonische Ebene) und
- erleben, wie die Operationen immer wieder durch das Antippen beim Zählen oder durch das Legen von Plättchen handelnd nachvollzogen werden (n-aktiv).

Kinder lernen Schritt für Schritt eine Aufgabenstellung zu verstehen.

**Im Laufe der nächsten Rechentrainings lernen alle Kinder nach und nach die Aufgabestellung auf immer höheren Abstraktionsebenen zu erfassen, solange bis sie die Aufgabe auf sprachlicher Ebene verstehen:** Kinder lernen zugehörige Bilder (ikonische Ebene) und Handlungen (n-aktive Ebene) dem verbal-symbolischen Aufgabenformat zuzuordnen.

**Nach der Lösung der Aufgabe ist es günstig, wenn die Lehrer:in die Aufgabe nochmal wiederholt:**

**L: „Was ist 6+4? – Wer eine Idee hat, steht auf!“**

Bei der Wiederholung verstehen schon mehr Kinder spontan die Aufgabestellung im symbolischen Format und können diese auch spontan lösen. Die Lehrer:in gibt dann weitere Hilfen, Kinder können die Aufgabe mit immer weniger Hilfestellungen lösen.

Kinder realisieren dabei, dass sie immer schneller werden, immer mehr wissen; **das wird regelmäßig von der Lehrer:in in der Klasse thematisiert.**

Kinder lernen in den folgenden Mathetrainings die Aufgabe vom Konkreten zum Abstrakten und um-gekehrt zu übersetzen.

Im weiteren Verlauf dieser Phase wird das Anschauungsmaterial abgedeckt und die Kinder werden aufgefordert, dieselben Aufgaben nochmal „verdeckt“ zu rechnen.

**L: „Was ist 6+4? – Wer eine Idee hat, steht auf!“**

Viele Kinder lösen die Aufgabe nun ohne Hilfestellungen, andere Kinder benötigen nur noch wenige Hilfen.

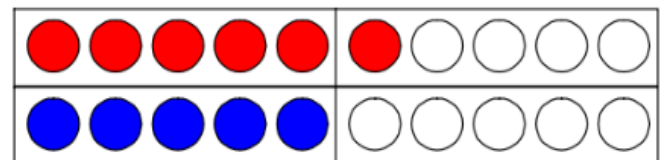
**Nun können wir mit Umkehraufgaben weitermachen oder beginnen eine erste Ableitung.** Wir entscheiden uns für die Nachbaraufgabe „6+4=10“ → „6+5=?“

**"Wenn 6+4=10 ist, was könnte dann 6+5 sein?"**

Ein paar Kinder haben eine Idee, sie stehen auf, viele Kinder können jedoch diese Aufgabe noch nicht lösen. Sie haben ev. das Konzept "Nachbaraufgabe" noch nicht im sprachlich-symbolischen Aufgabenformat erworben.

Sie verstehen noch nicht auf abstrakter Ebene, dass eine Summe um 1 größer wird, wenn ein Summand um eins größer ist.

**Wir gehen wieder mit einer „Hilfeleiter“ nach dem EIS-Prinzip vor.** Wir arbeiten mit einer Darstellung der



Aufgabe im Zwanzigerfeld. und geben Hilfen über eine „Hilfeleiter“ auf bildlicher und später auf handelnder Ebene bis alle Kinder eine Lösungsidee haben.

Danach wird das Zwanzigerfeld verdeckt (möglicherweise die Kinder für ein paar Sekunden durch irgendwas abgelenkt) und die Aufgabe nochmal wie bei der letzten Aufgabe „6+4=?“ gestellt und dann sofort nochmal wiederholt.

**Hinweis zu „Hilfestellungen“**



Nach dem „Prinzip der minimalen Hilfe“ (Aebli, H. 1983, 300) ist es „unangenehm und man fühlt sich nicht für voll genommen, wenn man mehr Hilfe annehmen muss, als man eigentlich braucht“.

So dürfen sich rechenstarke Kinder während des Trainings selbstständig Augenbinden anlegen oder ihre Sitzposition so verändern, dass sie Hilfestellungen der Lehrer:in auf ikonischer und handelnder nicht mehr sehen können und somit zeigen, dass sie diese Aufgabe auch schon ohne Hilfen lösen können.



# Rechnen lernen im täglichen Mathetraining

Aufbauend auf den in der Einführung des Mathetrainings beschriebenen Grundlagen geben wir auf den folgenden Seiten Hinweise zur didaktischen Umsetzung und zur Auswahl von Lerninhalten in jedem der sechs Trainingsfelder.

## Trainingsfeld 1: „Zählen und der Erwerb des Zahlwortsystems“



Kinder lernen bei unserer Vorgehensweise nicht nur das Vorwärts- und Rückwärtszählen in einem künstlich begrenzten Zahlenraum bis 20, wie wir das aus dem gängigen Anfangsunterricht kennen, sondern das Vorwärts- und Rückwärtszählen in Einer-, Zehner- und Hunderterschritten mindestens im Zahlenraum 1000 plus (mit dem ZSM darstellbare Zahlen bis max. 10.000). Wir trainieren das Zählen mit gleichzeitiger Mengenzuordnung in den ersten Schulwochen und -monaten in jedem Mathetraining. Kinder lernen beim Zählen nach und nach die Besonderheiten unseres Zahlwortsystems kennen (→ Analyse S. 46).

Vielen Erwachsenen erscheint unser **Zahlwortsystem** weitgehend regelmäßig zu sein, doch es **hat viele Besonderheiten**: so heißt es „ein-und-vierzig“ und „fünf-und-vierzig“ – aber warum dann nicht „ein-und-zehn“ und „fünf-und-zehn“ oder gar „ein-und-eins-zig“ und „zwei-und-eins-zig“? Es heißt doch vier-zig und fünf-zig, aber warum nicht eins-zig und zwei-zig? Wir müssen uns dieser und anderer Besonderheiten bewusst sein, um Kinder im Lernprozess verstehen und die Geduld für die Kinder aufbringen zu können, die diese Hürden nicht so leicht nehmen können.

**Lehrer:innen sollten Kindern im Mathetraining ausreichend Zeit geben, um unser Zahlwortsystem sicher erlernen und automatisieren zu können.** Das ist eine wichtige Voraussetzung dafür, dass Kinder ihre Aufmerksamkeitsressourcen auf das Erlernen des Rechnens richten können.

## Zählen in Strukturen

Wir erlernen parallel zum Zählen die Zahl-Mengen-Zuordnung mit den drei Strukturen, die den verschiedenen Ableitungsstrategien des später folgenden Rechentrainings zugrunde liegen:

### Zählen mit parallelem Training der 10er-Struktur:

- Zählen in Einerschritten bis ca. 35
- Zählen in Zehnerschritten bis ca. 150 (250)
- Zählen in Hunderterschritten bis ca. 1500 (2500)

→ im darauffolgenden Rechentraining bietet sich das Rechnen im fünften Trainingsfeld an

Das Zählen in der 10er-Struktur führt zu den Ableitungsstrategien „**um eins, zwei mehr oder weniger**“, „**Rechnen mit der 10**“, „**8er, 9er-Trick** und „**Fast alles Abräumen**“. Das Verstehen des Stellenwertsystems ist die Grundvoraussetzung, um bereits in den ersten Schulwochen mit Kindern **im fünften Trainingsfeld ins Rechnen kommen** zu können. So bemühen wir uns von Anfang an darum, dass sich Kinder möglichst bald einfache Zahlen mit einzeln simultan erfassbaren Stellenwerten (1,2,3,4) simultan vorstellen können: z.B. 14, 32, 34, 213, ...

Ein weiterer Grund für das Zählen mit gleichzeitiger 10er-basierter Mengenzuordnung ist, dass Kinder, die das zehnerbasierte Zahlensystem bereits im Zuge des Zahlworterwerbs erfassen können, vermutlich später geringere Schwierigkeiten haben, das arabische Notationssystem zu erlernen, → Landerl / Vogel / Kaufmann (2017, 76).

### Zählen mit parallelem Training der 5er-Struktur:

- Zählen in Fünferschritten bis 20, rechenstarke Kinder ev. weiter. Das Zählen mit dem Zehnersystemmaterial auf handelnd-ikonischer Ebene begleiten.



Günstig ist eine Markierung bei der Fünf, die im Downloadbereich der MatheLernBar(1) zu finden ist: „Damit die Rechnung nicht nur durch zählen-des Rechnen gelöst werden kann, ist es empfehlenswert, eine Markierung bei der 5 vorzunehmen. Dadurch wird das simultane bzw. das quasisimultane Erfassen der einzelnen Mengen ermöglicht.“

→ Im darauffolgenden Rechentraining bietet sich das Rechnen mit der „**Kraft der 5**“ im vierten Trainingsfeld oder „**Mit der Kraft der 5 über die 10**“ im sechsten Trainingsfeld an.

## Zählen mit parallelem Training der Verdoppelungsstruktur:

- Zählen in Zweierschritten bis 20 (rechenstarke Kinder ev. weiter – dann mit Zehnersystemmaterial ZSM / Zwanzigerfeld / ... – auf handelnder-ikonischer Ebene begleiten.

→ Im darauffolgenden Rechentraining bietet sich das Rechnen mit der Strategie „**Verdoppeln und Halbieren**“ im Trainingsfeld 4 an.

**Auch Kindern, die bei Schuleintritt schon sicher zählen können**, muss es bei unseren Zählübungen nicht langweilig werden: sie lernen in den oben beschriebenen Übungen parallel die Mengenzuordnung zu unterschiedlich strukturierten Mengen (Basis 10, 5 und 2) mit verschiedenen Anschauungsmaterialien kennen.

## Verschiedene Zählaufgaben

**Der Schwierigkeitsgrad von Aufgabestellungen** ergibt sich durch die Wahl des Zahlenraums, die Größe einzelner Zählsschritte, die Wahl der Startzahl und der Zählrichtung.

### So zählen wir von Anfang an

- vorwärts und rückwärts mit verschiedenen **Startzahlen**,
- in unterschiedlichen **Zahlenräumen** und Übergängen, man kann beispielsweise das Zählen mit den ersten Zahlen der zweiten Dekade „elf, zwölf, dreizehn“ auch so üben: „111,112, ...“ oder „1011,1012, ...“ usw.
- **Analogie-Zahlenreihen**: statt der 2er-Reihe die 20er- oder 200er-Reihe
- **Nachbar-Zahlenreihen**: statt die 5er-Reihe die 6er-Reihe, statt die 10er- die 11er-Reihe und anstatt der Tausenderreihe die 999er- oder 990er- oder...-Reihe: **es gibt viele Variationsmöglichkeiten.**

### Beispiel für rechenstarke Kinder:

- 12er-Reihe ohne Hilfen (Augenbinde, Herumdrehen auf dem Stuhl), während die Klasse die Reihe mit Hilfen strukturierter Materialien auf handelnd-ikonischer Ebene an der Magnettafel verfolgen kann:
- am ersten Tag zählen die rechenstärksten Kinder die 12er-Reihe ev. bis 60 und dann rückwärts
- am zweiten Tag bis 96 und dann wieder rückwärts
- an den Folgetagen irgendwann die 12er-Reihe bis 120 und rückwärts
- an den Folgetagen die Reihe mit Zeitnahme, Ziel: Reihe flüssig, immer flüssiger zählen können.

## Zähl-Varianten, damit das Zählen nicht langweilig wird

- mal sprechen wir das Zahlwort zuerst, mal gleichzeitig, mal folgt die Mengendarstellung dem gesprochenen Zahlwort
- mal zählen wir ganz langsam, mal schneller
- mal zählen wir als Mäuse, ... Elefanten, Affen, Krokodile, ... als Polizisten, Räuber, .... als Mamas und Papas, ... als liebe oder böse Kinder, lustige Kinder, traurige Kinder, als Lehrerinnen, als Lehrer, als ... (Kinder haben viele Ideen!)
- Variation der Aktivierung: alle Kinder sprechen unisono / mehrere Kinder oder ein Kind spricht / kein Kind spricht laut. Alle Variationen sind mit oder ohne Unterstützung der Lehrperson möglich.
- nur jede zweite, dritte, fünfte, .... Zahl wird laut ausgesprochen
- immer wieder Zähl-STOPP: Stimmt die an der Magnettafel dargestellte Zahl? Prüfen, dann weiterzählen ...
- während des Zählens unterbricht die Lehrer:in häufig die zählenden Kinder, danach zählt ein anderes Kind (andere Kinder oder die gesamte Klasse) weiter bis zum nächsten „STOPP“
- das Zählen wird über Klangstäbe gesteuert: hoher Ton bedeutet weiter vorwärts zählen, tiefer Ton rückwärts weiterzählen.

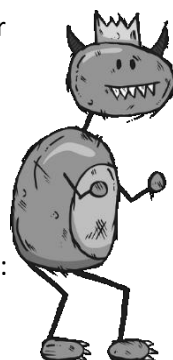
## Exkurs: Zählen lernen mit „DaZ-Kindern“

**Unterrichtsrealität:** von heute auf morgen kommen mitten im zweiten Schuljahr drei Kinder ohne deutsche Sprachkenntnisse in die Klasse.

Wir besprechen gemeinsam mit allen Kindern die Situation: ein mathematisch talentiertes Kind und ein Kind mit erhöhtem Förderbedarf, beide sozial sehr kompetent, wollen die Flüchtlingskinder trainieren.

Beide Kinder wissen genau, wie die Lehrer:in Trainings leitet, und bekommen einen zeitlichen Rahmen, in dem sie in den nächsten Wochen in jeder Mathestunde einige Trainingsziele ansteuern sollen.

Das Training klappt hervorragend, die Trainer:innen nehmen ihre Aufgabe sehr ernst und trainieren erfolgreich die drei Flüchtlingskinder, während die Lehrer:in im Hintergrund bleiben kann.



# Rechnen lernen im täglichen Mathetraining

## Trainingsfeld 2: Zahl-Mengen-Zuordnung

### Einige Übungsmöglichkeiten

#### A) Gesprochene Zahl → Strukturierte Menge

##### Übungsformen im Stuhlkreis mit Magnettafel

- Die Lehrer:in verteilt Kärtchen mit darauf abgebildeten strukturierten Mengen und hat beim Verteilen der Karten die Möglichkeit, die Aufgabenschwierigkeit für verschiedene Kinder der Klasse zu differenzieren. Dann ruft sie die Zahlen auf, Kinder zeigen ihre Kärtchen und erklären die strukturierte Menge.
- „Bau mir eine Zahl“: Die Lehrer:in oder ein Kind nennt eine Zahl. Kinder, die diese Zahl an der Magnettafel „bauen“ möchten, melden sich und werden von der Lehrer:in bzw. dem Kind, das die Zahl genannt hat, aufgerufen. Variation: die Lehrer:in oder eine Schüler:in oder das Kind, welches die strukturierte Menge legt, bestimmt das Material.

##### Übungsformen in Kleingruppen - ohne Stuhlkreis

- Lehrer:in spricht eine Zahl und jedes Kind (auch zu zweit, zu dritt an Gruppentischen) baut die Zahl mit vorgegebenem Material an einem Arbeitsplatz. Die Lehrer:in bewertet die Ergebnisse. Falls in Partner- bzw. Gruppenarbeit gearbeitet wird, bewerten Schüler:innen gegenseitig die Ergebnisse. In Zweifelsfällen kann die Lehrer:in gefragt werden. Eine Variation ist über unterschiedliche Gruppenaufgaben und verschiedene Rollen in der Gruppe möglich.
- Kinder würfeln Zahlen am Gruppentisch, ein Kind oder zwei Kinder bauen beispielsweise eine Zahl. Ein drittes Kind bewertet die Lösungen (→ analoge Vorgehensweise wie beim angeleiteten Üben, →S. 76 ff.).

#### B) Strukturierte Menge → Gesprochene Zahl

##### Einige Übungsmöglichkeiten im Sitzkreis

1. Karten mit Abbildungen strukturierter Mengen (Variationen: Darstellungen mit unterschiedlichen Materialien) werden für alle Kinder sichtbar ungeordnet auf der Magnettafel verteilt. Die Kinder werden einzeln nacheinander aufgerufen:
  - Übung „Mengen benennen“: Kinder holen sich eine Karte, zeigen diese deutlich den anderen Kindern der Klasse, benennen die Menge, begründen dies und hängen die Karte rechts an die Magnettafel.
  - Übung „Mengen ordnen“: Kinder sollen die Karten, die rechts an der Magnettafel hängen, beginnend mit der kleinsten Menge sortieren.

2. Karten mit Abbildungen strukturierter Mengen (Variationen: Darstellungen mit unterschiedlichen Materialien) hängen **verdeckt** an der Magnettafel. Es gibt für Mengen gleicher Mächtigkeit jeweils zwei (drei) verschiedene Darstellungen mit unterschiedlichem Material.

- Übung „Benennen und zuordnen“: Kinder decken jeweils eine Karte auf, benennen die Menge und heften diese (falls möglich neben eine Menge gleicher Mächtigkeit) wieder an die Magnettafel.

3. An der Magnettafel hängen unsortiert Karten mit arabischen Zahlen. Die Lehrer:in verteilt verdeckt Karten, auf denen auf einer Seite eine Zahldarstellung mit strukturierten Mengen abgebildet ist. Die Karten haben verschiedene Farben, die den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe markieren.

- Übung: Zuordnung strukturierte Menge – geschriebene Zahl: Kinder heften nacheinander ihre Karten an die Magnettafel und ordnen sie dabei einer arabischen Zahl zu. Sie erklären bzw. begründen jeweils genau ihre Lösung.

Variation: Kinder wählen den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe über die Farben selbst.

4. Jedes Kind zeichnet eine Zahldarstellung auf eine Karte und heftet diese danach an die Magnettafel.

- Übung: Zuordnung strukturierte Menge – Zahlwort: Die Kinder treffen sich dann im Sitzkreis. Jedes Kind stellt seine Mengendarstellung vor und benennt diese.

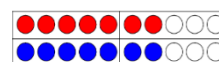
### Gezieltes Blitzblick-Training

**Die simultane Erfassung strukturierter Mengen ist das Eingangstor, um mit Ableitungsstrategien ins Rechnen zu kommen.** Ausgewählte strukturierte Mengen (Handreichungen zu Anschauungs- und Handlungsmaterialien → MatheLernBar Schorndorf(2)) sind die Basis für das Rechnen mit bestimmten Ableitungsstrategien. **Kinder sollen sich bereits in den ersten Schulwochen 2 bis 5 der unten aufgeführten Zahlentripel simultan vorstellen können um damit ins Rechnen zu kommen.**

#### Wählt die Lehrer:in für ihren Unterricht

1. eine der Zahlen von sechs bis zehn in der Fünferzerlegung, beispielsweise die „8“ mit dem Zahlentripel „ $5+3=8$ “, hat sie die Grundlage, um mit der Rechenstrategie „**Starke 5**“ mit Umkehr-, Ergänzungs- und Analogieaufgaben ins Rechnen zu kommen.

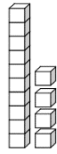
2. Zweierzahlen im Zahlenraum bis 20, z.B. die „14“:



kann sie auf dieser Grundlage mit der Rechenstrategie „**Verdoppeln und Halbieren**“ ins Rechnen kommen.

**3. Zehnerzerlegungen**, z.B. das Zahlentripel „6+4=10“, können Kinder über die simultane Erfassung der strukturierten Mengen 4, 6, und 10 das Zahlentripel auf der Basis von Verständnis erlernen und darauf aufbauend mit der Strategie „**Zehnerfreunde**“ über Umkehr-, Nachbar- und Analogieaufgaben ins verstandene Rechnen kommen (→ S. 27).

**4. Zahlenbilder arabischer Zahlen**, z.B. die „14“, können Kinder auf der Grundlage der simultanen Erfassung der Teilmengen 10 und 4 und mit der Kenntnis des Zahlbildungsprinzips die **Zahl „14“ verstehen lernen**. Auf dieser Basis können Kinder im fünften Trainingsfeld mit vier Rechenstrategien ins Rechnen kommen.



## Trainingsfeld 3: Lesen und Schreiben von Zahlen

Nach einigen Schulwochen,

- nachdem Kinder sicher in Einer-, Zehner- und Hunderterschritten zählen können
- nach dem Ziffernschreibkurs,
- nachdem die Kinder das Zehnersystem schon gut aus der Anschauung heraus kennengelernt haben,

beginnen wir strukturierte Mengen zu verschriftlichen.

Beim Lesen und Schreiben von Zahlen und dem Erwerb des Stellenwertsystems gehen wir zunächst immer von Veranschaulichungen von Mengen mit dem Zehnersystemmaterial aus und ordnen den Stellenwerten verschiedene Ziffern zu. Dabei arbeiten wir mit Zahlen wie 134, 213 oder 314, deren Stellenwerte man simultan erfassen kann. Ziel ist, das Übersetzen von gesprochenen Zahlen in geschriebene Zahlen zu erlernen und zu automatisieren.

### Zehner-Einer-Inversion

Als eine Herausforderung in diesem Lernprozess erweist sich **eine Besonderheit unseres Zahlwortsystems, die beim Zahlworterwerb noch keine Rolle gespielt hat**: wir schreiben beispielsweise die Zahl „**2-3-4-2**“, doch wir sprechen die Zahl nicht „zwei-Tausend-drei-Hundert-vier-Einszig—Zwei“ oder zumindest „zwei-Tausend-drei-Hundert—Vierzig--Zwei“, sondern wir machen es noch ein bisschen komplizierter, indem wir die Reihenfolge der Zehner und Einer vertauschen und ein „und“ einsetzen: „zwei-Tausend-drei-Hundert—zwei—und--vierzig“.

Kinder müssen also nicht nur die im ersten Trainingsfeld erlernten Besonderheiten unseres Zahlwortsystems in arabische Zahlen übersetzen, sondern auch die **„Zehner-Einer-Inversion“** beachten.

Beim Umwandeln von einem Zahlenformat in ein anderes, auch „Transkodieren“ genannt, ergeben sich eine Reihe von **Herausforderungen, die mit den Eigenschaften und Besonderheiten unseres Zahlwort- und Stellenwertsystems zusammenhängen** (→ S. 46, 47):

1. die Zahlwörter zwischen 11 und 19 sind eine besondere Wortklasse:
2. für jede Dekade gelten besondere Zahlwörter
3. die Einer-Zehnerinversion
4. Nullen als Platzhalter
5. große Zahlen als zunehmend komplexe Herausforderungen

Auch im dritten Trainingsfeld gilt: um Teilhabe zu ermöglichen, gilt es **„überschaubare Lernsituationen für rechenschwächere Kinder“** zu schaffen. Auf der Grundlage ihres Wissens über oben beschriebene Herausforderungen können Lehrer:innen diesem Trainingsfeld verschiedene Trainingsschwerpunkte und -inhalte zuordnen, indem sie Lernprozesse in einzelne Lernschritte zerlegen und diese Kindern nacheinander vermitteln, bevor sie Kinder mit zunehmend komplexen Anforderungssituationen konfrontieren.

### Einige Übungsmöglichkeiten

#### Zahlwörter

- mit strukturierten Materialien darstellen
- auf verschiedene Art und Weise zeichnen
- zu Karten unterschiedlich strukturierter Mengendarstellungen zuordnen

und danach als arabische Zahlen **aufschreiben oder geschriebenen Zahlkarten zuordnen**.

Auf dem gleichen Weg lassen sich arabische Zahlen als Mengen darstellen und danach Zahlwörtern zuordnen.

Beispiel für die **Steigerung des Schwierigkeitsgrades mit zunehmend größeren Zahlen** auf der Grundlage zweistelliger Zahlen: **33, 45 und 51** → 133, 245, 151, 3133, 5245, 2151. ...

Beispiele für **zwei-, drei- und vierstellige Zahlen auf der Grundlage „schwierigerer“ zweistelliger Zahlen**:

**12, 21, 72** → 212, 421, 672, 2112, 2521, 2372  
**11, 16, 17** → 211, 916, 1717, 2611, 3716, 4217

Beispiele für komplexe Aufgabestellungen mit der **Steigerung des Schwierigkeitsgrades mit Nullen als Platzhalter**: 100, 102, 120, 410, 804, 1000, 1001, 1100, 1010, 1110, ..und ggf. auch: 7604, 17604, 99604, 111000, 999000, 999001, 999111, 1000000, 1000001, 9000000, ...184222001, ...



# Rechnen lernen im täglichen Mathetraining

## Überblick: Rechenttraining

Im **Rechenttraining** erwerben Kinder im Anfangsunterricht mit **elf Lösungsstrategien** die für verstehendes Rechnen notwendigen Rechenfertigkeiten:

- die drei „klassischen“ Ableitungsstrategien im Trainingsfeld 4: „die starke 5“, „Zehnerfreunde“ und „Verdoppeln und Halbieren“. Diese Strategien beruhen auf insgesamt 18 Zahlentripeln.  
Leicht zu erlernende Zahlentripel wie „ $1+1=2$ “, „ $2+2=4$ “, „ $3+3=6$ “ oder „ $5+5=10$ “ und „ $10+10=20$ “ lernen Kinder im Unterricht nebenbei. Wir konzentrieren uns im vierten Trainingsfeld somit auf das Erlernen zehn ausgewählter Zahlentripel als Grundlage für das Rechnen mit Ableitungsstrategien.
- vier weitere Ableitungsstrategien im fünften Trainingsfeld auf der Grundlage arabischer Zahlen und der Fähigkeit, sich diese simultan als „Zahlenbild“ vorstellen zu können (Rechnen lernen auf der Basis des Aufbaus bzw. der Logik unseres Stellenwertsystems).
- die Rechentechnik „Mit der Kraft der 5 über die 10“ im sechsten Trainingsfeld: damit haben Kinder noch eine elfte Lösungsstrategie, die ihnen als „Plan B“, helfen kann, wenn ihnen mal keine der zehn Ableitungsstrategien zum Lösen einer Aufgabestellung in konkreten Rechensituationen einfällt.
- Ableitungen auf der Basis dreier Rechengesetze: das Assoziativgesetz („Zahl Zerlegen“), das Kommutativgesetz („Tauschaufgaben“) und das Konstanzgesetz der Summe („Gegenseitiges Verschieben“) werden häufig in Kombination mit anderen Lösungsstrategien eingesetzt und parallel in verschiedene Übungssequenzen in den Trainingsfeldern 4 bis 6 einbezogen.

## Trainingsfeld 4: Ableitungen auf der Grundlage von Zahlentripeln

Rechenschwächere Kinder brauchen für sie **überschaubare Lernsituationen** (→ S. 53) und **längere Erarbeitungs- und Übungsphasen**, um neue Strukturen zu erfassen und sich merken zu können:

So steht ein Zahlentripel im vierten Trainingsfeld oft über mehrere Tage hintereinander, zu Beginn des Anfangsunterrichts manchmal auch über Wochen im Mittelpunkt des täglichen Mathetrainings.

**Michael Gaidoschik (2009, 6)** schreibt dazu: „Alle Kinder können diese Strategien verstehen, aber manche benötigen dabei gezielte Unterstützung. **Sie müssen Zeit haben, sich erst mal (und sei es über Wochen) auf nur eine Strategie einzulassen...** . Wenn ein Kind sich eine bestimmte Strategie zu eigen gemacht hat, kann es die nächste lernen“.

Wir verlassen einen Trainingsschwerpunkt in aller Regel erst dann, wenn die rechenschwächsten Kinder der Gruppe selbstständig erste Ableitungsaufgaben lösen können bzw. erfolgreich eine neue Strategie erlernt haben und ausreichend Zeit zum Üben hatten.

**Wir können rechenschwächeren Kindern bei unserer Vorgehensweise problemlos die Zeit geben**, die sie für das Erlernen jeder einzelnen Ableitungsstrategie brauchen, da wir parallel allen anderen Kindern, auch den rechenstärksten, mit derselben Strategie interessante und spannende Aufgabestellungen im nach oben offenen Zahlenraum anbieten können.

**Erfahrungsgemäß gehen uns auf diese Weise die rechenstärksten Kinder leistungsmäßig mit der Zeit förmlich „durch die Decke“** – sie sind intelligent und hochmotiviert und nehmen es am Ende der zweiten Klasse im Kopfrechnen mit Additions- und Subtraktionsaufgaben auch gerne mit jedem anderen Kind in unserer Schule auf.

### Aufgabenpool: „ $6+4=10$ “

Fürs Mathetraining finden wir im nach oben offenen Zahlenraum **auf der Basis eines Zahlentripels eine Vielzahl von Aufgabestellungen**. Es gibt, wie in den Tabellen auf der nächsten Seite dargestellt, im Hunderterraum, wenn man zusätzlich mögliche Tauschaufgaben berücksichtigt, mehrere hundert, im Tausenderraum mehrere tausend mögliche Trainingsaufgaben, um das Rechnen mit Ableitungen zu erlernen und zu üben.

**Neben der bloßen Anzahl von möglichen Aufgaben** ist der **Motivationscharakter** von Aufgaben entscheidend: da dürfen die dafür so wichtigen „großen Zahlen“ nicht fehlen. Daher haben wir eine kleine Auswahl der unzähligen Ableitungsmöglichkeiten des Zahlentripels im ZR über 1'000 in einer zweiten Tabelle dargestellt.

**Die Aufgabenschwierigkeit hängt nur bedingt von der Zahlengröße ab:** Aufgaben mit großen Zahlen wie „ $6'000+4'000=?$ “ können Kinder in unserem Unterricht, in dem wir von Anfang an im Zahlenraum bis etwa 10'000 mit dem ZSM arbeiten, nach kurzer Zeit über die handelnde und bildliche Ebene direkt auf dem Weg  $6+4=10 \rightarrow 6'000+4'000=10'000$  verstehen und lösen.

Aufgabestellungen in komplexeren Rechenzusammenhängen wie „ $800-64$ “ über den Weg

-  $6+4=10 \rightarrow 10-6=4 \rightarrow 100-60=40 \rightarrow 800-60=740$   
→ und  $10-4=6 \rightarrow 40-4=36$  und dann:  $800-64=736$

stellen eine anspruchsvolle Herausforderung für mathematisch talentierte Kinder dar.



| 6+4=10               | Ableitungsmöglichkeiten: Nachbar- und additive Analogiebeziehungen                                                          |                                                               |                                                        |                                                                                                                                                         |
|----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                      | Kernaufgabe, Umkehr- und Analogieaufgaben                                                                                   | Nachbar-aufgaben                                              | Analogieaufgaben additiv „+10(100)“                    | Nachbar- von Analogieaufgaben                                                                                                                           |
| Zahlenraum bis 1000  | <b>1a) Kernaufgabe</b><br>(„Arithmetisches Faktum“)<br><b>6 + 4 = 10</b>                                                    | 6+5=?<br>6+3=?<br>7+4=?<br>5+4=?                              | 16+4=?,<br>26+4=?,<br>usw.                             | 16+5=?, 26+5=?, ...<br>16+3=?, 26+3=?/...<br>17+4=?, 27+4=?, ...<br>15+4=?, 25+4=?, ...                                                                 |
|                      | <b>1b) Umkehraufgabe</b><br><b>10 - 4 = 6</b><br>(ev. auch Umkehraufgabe 10-6=4 und Ergänzungsaufgaben 6+?=10, 4+?=10)      | 10-5=?<br>10-3=?<br>11-4=?<br>9-4=?                           | 20-4=?,<br>30-4=?,<br>usw.                             | 20-5=?, 30-5=?, ...<br>20-3=?, 30-3=?, ...<br>21-4=?, 31-4=?, ...<br>19-4=?, 29-4=?, ...                                                                |
|                      | <b>2a) Analogieaufgabe</b><br>additiv „+100“<br><b>106 + 4 = 110</b>                                                        | 106+5=?<br>106+3=?<br>107+4=?<br>105+4=?                      | 116+4=?, 126+4, ...<br>216+4=?, 226+4,...<br>usw.      | [106 (206,...) +10 (20,...)] + 5=?<br>[106 (206,...) + (10,20,...)] + 3=?<br>[107 (207,...) + (10,20,...)] + 4=?<br>[105 (205,...) + (10,20,...)] + 4=? |
|                      | <b>2b) Umkehraufgabe zur Analogieaufgabe additiv „+100“</b><br><b>110 - 4 = 106</b><br>(ev. 110-6=40, 106+?=110, 104+?=110) | 110-5=?<br>110-3=?<br>111-4=?<br>109-4=?                      | 120-4=?, 130-4=?, ...<br>220-4=?, 230-4=?, ...<br>usw. | [110 (210,...) +10 (20,...)] -5=?<br>[110 (210,...) + (10,20,...)] -3=?<br>[111 (211,...) + (10,20,...)] -4=?<br>[109 (209,...) + (10,20,...)] -4=?     |
| 6+4=10               | Ableitungsmöglichkeiten: Nachbar- und multiplikative und additive Analogiebeziehungen                                       |                                                               |                                                        |                                                                                                                                                         |
|                      | Kernaufgabe, Umkehr- und Analogieaufgaben                                                                                   | Nachbar-aufgaben                                              | Analogieaufgaben „+100(1'000,10'000)“                  | Nachbar- von Analogieaufgaben                                                                                                                           |
| Zahlenraum bis 1000  | <b>1a) Analogieaufgabe</b><br>multiplikativ „·10“<br><b>60 + 40 = 100</b>                                                   | 60+50=?<br>60+30=?<br>70+40=?<br>50+40=?                      | 160+40=?,<br>260+40=?,<br>usw....                      | 160+50=?, 260+50=?, ...<br>160+30=?, 260+30=?,...<br>170+40=?, 270+40=?, ...<br>150+40=?, 250+40=?, ...                                                 |
|                      | <b>1b) Umkehraufgabe zu Analogieaufgaben „·10“</b><br><b>100 - 40 = 60</b><br>(ev 100-60=40, 60+?=100, 40+?=100)            | 100-50=?<br>100-30=?<br>110-40=?<br>90-40=?                   | 200-40=?,<br>300-40=?,<br>usw.                         | 200-50=?, 300-50=?, ...<br>200-30=?, 300-30=?, ...<br>210-40=?, 310-40=?, ...<br>190-40=?, 290-40=?, ...                                                |
| Zahlenraum 1000 plus | <b>2a) Analogieaufgabe</b><br>multiplikativ „·100“<br><b>600 + 400 = 1'000</b>                                              | 600+500=?<br>600+300=?<br>700+400=?<br>500+400=?              | 1'600+400=?,<br>2'600+400=?,<br>usw. ...               | 1'600+500=?, 2'600+500=?, ...<br>1'600+300=?, 2'600+300=?,...<br>1'700+500=?, 2'700+500=?, ...<br>1'500+500=?, 2'500+500=?, ...                         |
|                      | <b>2b) Umkehraufgabe</b><br><b>1'000 - 400 = 600</b><br>(ev 1000-600=400, 600+?=1000, 400+?=1000)                           | 1'000-500=?<br>1'000-300=?<br>1'100-400=?<br>900-400=?        | 2'000-400=?,<br>3'000-400=?,<br>usw. ...               | 2'000-500=?, 3'000-500=?, ...<br>2'000-300=?, 3'000-300=?, ...<br>2'100-400=?, 3'100-400=?, ...<br>1'900-400=?, 2'900-400=?, ...                        |
|                      | <b>3a) Analogieaufgabe</b><br>multiplikativ „·1'000“ („·1T“)<br><b>6T + 4T = 10T</b>                                        | 6T + 5T = ?<br>6T + 3T = ?<br>7T + 4T = ?<br>5T + 4T = ?      | 16T + 4T = ?,<br>26T + 4T = ?,<br>usw. ...             | 16T + 5T = ?, 26T + 5T = ?, ...<br>16T + 3T = ?, 26T + 3T = ?, ...<br>17T + 4T = ?, 27T + 4T = ?, ...<br>15T + 4T = ?, 25T + 4T = ?, ...                |
|                      | <b>3b) Umkehraufgabe</b><br><b>10T - 4T = 6T</b><br>(ev. 10T-6T=?, 6T+?=10T, 4T+?=10T)                                      | 10T - 5 T = ?<br>10T - 3 T = ?<br>11T - 4T = ?<br>9T - 4T = ? | 20T - 4T = ?,<br>30T - 4T = ?,<br>usw. ...             | 20T -5T = ?, 30T - 5T = ?, ...<br>20T -3T = ?, 30T - 3T = ?, ...<br>21T -4T = ?, 31T - 4T = ?, ...<br>19T -4T = ?, 29T - 4T = ?, ...                    |

# Rechnen lernen im täglichen Mathetraining

## Trainingsfeld 5: Ableitungen auf der Grundlage arabischer Zahlen

Manche Kinder brauchen wesentlich mehr Zeit und Übung als andere, um sich Zahlenbilder arabischer Zahlen mühelos vorstellen zu können. Das führt im traditionellen Unterricht häufig dazu, dass diese Kinder Ableitungsstrategien auf der Grundlage von Zahlenbildern nicht erlernen können!

Wir versuchen alles zu tun, um möglichst günstige Bedingungen zu schaffen, damit alle Kinder in den ersten Schulwochen lernen **unser Stellenwertsystem zu verstehen, damit wir** auf dieser Grundlage gemeinsam ins Rechnen kommen können. **Wir drehen daher gleichzeitig an vier Stellschrauben:**

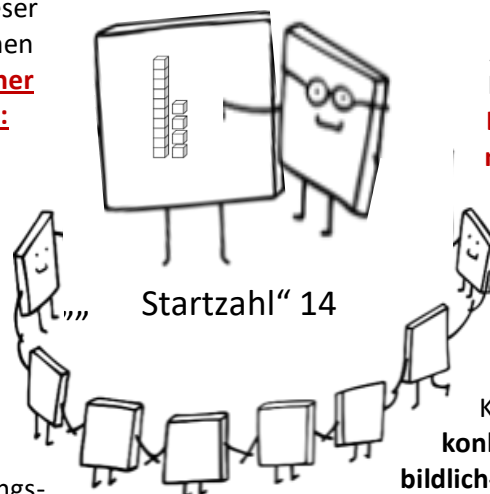
1. Kinder lernen vom ersten Schultag an in jedem Mathetraining **das Zählen mit paralleler Zahl-Mengen-Zuordnung** auf bildlicher und handelnder Ebene und bekommen damit bereits beim Zählen einen Zugang zu unserem Stellenwertsystem.
2. Kinder üben im zweiten Trainingsfeld des Zahlentrainings systematisch die Zahl-Mengen-Zuordnung im offenen Zahlenraum auf vielfältige Art und Weise, was sich weiterhin sehr günstig auf die Leistungsfähigkeit der Kinder in diesem Bereich auswirkt.
3. Wir bieten Kindern auch im fünften Trainingsfeld **überschaubare Lernsituationen**: wie wir im vierten Trainingsfeld Kindern manchmal über Tage und Wochen Zeit geben, das Rechnen mit einer einzigen Strategie zu erlernen und zu üben, schaffen wir im fünften Trainingsfeld überschaubare Lernsituationen, indem wir **im Rechentraining eines Tages nur mit einer einzigen arabischen Zahl bzw. dessen veranschaulichtem Zahlenbild als „Startzahl“ ins Rechnen kommen** (→ Beispiel Seite 29).

Dabei nehmen wir immer eine Zahl, deren einzelne Stellenwerte Kinder schnell simultan erfassen können (z.B. 14, 32, 34, 124 etc.).

Mit dieser Vorgehensweise nehmen wir Kindern die Arbeit ab bzw. **wir vermeiden die Überforderung, dass sich Kinder permanent, also mit jeder neuen Aufgabe, neue Zahlenbilder vorstellen müssen**, bevor sie mit dem Rechnen beginnen können.

**Das Arbeitsgedächtnis der Kinder wird auf diese Weise wesentlich entlastet, Kinder können sich auf das Erfassen der Aufgabestellung und das Erlernen des Rechnens mit Ableitungsstrategien und nicht auf das permanente Erzeugen von Zahlenbildern konzentrieren!**

4. Da wir die „Startzahl“ im Mathetraining für alle Kinder sichtbar mit dem Zehnersystemmaterial (oder einem anderem zehnerbasierten Material) an unserer Magnettafel veranschaulichen, können **Kinder diese „Startzahl“ sehr leicht als Ausgangspunkt fürs Rechnen nutzen.**



### „Sehendes Rechnen“

Kinder können im Mathetraining **den Lösungsprozess von Aufgaben „live“ mitverfolgen**, indem Lehrer:innen zuerst alle Aufgaben auf sprachlich-symbolischer Ebene stellen, dann die Aufgabestellung mehrfach wiederholen und dabei so lange Hilfen auf ikonischer und zum Schluss auf handelnder Ebene geben, bis alle Kinder eine Lösungs idee haben. **Wir konkretisieren dabei den Lösungsweg auf bildlich-handelnder Ebene an der Magnettafel vor den Augen der Kinder:** dieses gemeinsame Rechnen nennen Kinder **„Sehendes Rechnen“**.

Indem Rechenaufgaben wiederholt konkretisiert und abstrahiert werden, wird nach J. Bruner ein tiefes Verstehen der mathematischen Zusammenhänge erreicht (Hilgers, A., 2018).

### Beispiel Startzahl 14: mit der „14“ ins Rechnen kommen“

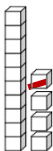
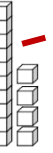
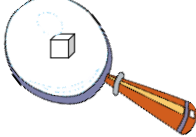
Wir kommen auf der Grundlage einer arabischen Zahl als „Startzahl“ bereits in den ersten Schulwochen im Rechentraining auf ganz unterschiedliche Art und Weise ins Rechnen, was wir am Beispiel der „14“ zeigen.

#### 1. Das Zahlenbild der „14“: Ausgangspunkt für das Rechnen mit vier Ableitungsstrategien

1. **„um eins (zwei, drei) mehr oder weniger“**  $14 \pm 1(2,3)$
2. **„Rechnen mit der 10, 100, 1000...“**  $14 + 10$  (20, 100, 200, 1000, ...) und  $14 - 10$
3. **„8er-9er-Trick“**  $14 \pm 10$  (9, 8, 11, 12)  
(Nachbaraufgaben von „Rechnen mit der 10“)
4. **„Fast alles Abräumen“**  $14 - 14 = 0 \rightarrow 14 - 13 = ?$  und  $14 - 12 = ?$

Ableitungen auf der Grundlage arabischer Zahlen (Verständnis des Zahlensystems)

## Aufgaben verstehen und lösen – konkretisieren und abstrahieren

| Symbolische Ebene                                                       | Bildliche Ebene                                                                                                     | Handelnde Ebene                                                                                                                                                                                                       | Bildliche Ebene                                                                                                    | Symbolische Ebene                                           |
|-------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| symbolisch-verbal<br>oder symbolisch-visuell                            | Ausgangspunkt:<br>ein Zahlenbild                                                                                    | konkrete<br>Rechenhandlungen                                                                                                                                                                                          | Rechenergebnis<br>auf bildlicher Ebene                                                                             | Übersetzung des<br>Ergebnisses auf die<br>symbolische Ebene |
| „Vierzehn plus eins?“<br>„um eins (zwei,<br>drei) mehr oder<br>weniger“ | Ein Zehner<br>und vier<br>Einer    | „plus 1“ heißt ...<br>„einen Einer dazu-tun“                                                                                         | Ein Zehner<br>und fünf<br>Einer  | Ergebnis: „15“<br>„Vierzehn plus eins<br>ist fünfzehn.“     |
| „Vierzehn minus<br>zehn?“<br>„Rechnen mit<br>der 10, 100,<br>1000 ...“  | Ein Zehner<br>und vier<br>Einer    | „minus 10“ heißt ...<br>einen Zehner<br>„weg-nehmen“                                                                                 | Vier Einer<br>                  | Ergebnis: „4“<br>„Vierzehn minus zehn<br>ist vier.“         |
| „Vierzehn minus<br>neun?“<br>„8er-9er-Trick“                            | Ein Zehner<br>und vier<br>Einer   | „minus 9“ heißt ...<br>„einen Zehner<br>weg-nehmen“<br>und<br>„einen Einer „dazu-tun“                                              | Fünf Einer<br>                | Ergebnis: „5“<br>„Vierzehn minus neun<br>ist fünf.“         |
| „Vierzehn minus<br>dreizehn?“<br>„Fast alles<br>Abräumen“               | Ein Zehner<br>und vier<br>Einer  | „minus 13“ heißt ...<br>„einen Einer liegen-<br>lassen und den Rest<br>„abräumen“: einen<br>Zehner und drei<br>Einer „weg-nehmen“  | Ein Einer<br>                  | Ergebnis: „1“<br>„Vierzehn minus<br>dreizehn ist eins.“     |

### 2. Das Zahlentripel „10+4=14“: Ausgangspunkt für das Rechnen mit einem Zahlentripel

#### 1. Umkehr- und Ergänzungsaufgaben:

 $10+4=14 \rightarrow 14-4=?$  ( $14-10=?$ ,  $10+?=14$ ,  $4+?=14$ )

#### 2. Nachbараufgaben:

 $14-4=10 \rightarrow 14-5=?$  oder  $14-4=10 \rightarrow 14-3=?$ , ...

#### 3. Analogieaufgaben: wie $14-4=10 \rightarrow 140-40=?$

#### 4. Nachbar- von Analogieaufgaben: wie z.B.

 $14-4=10 \rightarrow 140-40=100 \rightarrow 140-50=?$  oder ...

 $14+10=24 \rightarrow 140+100=240 \rightarrow 140+90=?$ 

#### 5. Rechengesetze: Kommutativgesetz: Tausch- aufgaben zu allen oben beschriebenen Um- kehr-, Ergänzungs-, Nachbar- und Analogie- aufgaben $10+4=4+10$ ; Konstanzgesetz von Summen: z.B. $10+4=9+5=8+6$ oder ...

### 3. Das Zahlenbild der „14“: Ausgangspunkt um mit Aufgaben mit mehreren Strategien parallel ins Rechnen zu kommen, z.B.:

- $14+10$  (11,12, ...) oder  $14+20$  (21,22, ...) oder  $14+30$  (31, 51, 71, ...) oder  $14+100$  (110, 111, 112, 131, 132, ...) oder  $14+1000$  (1100, 1110, 1111, ...) oder  $14+1000$  (1001, 1002, ...) oder ...
- oder  $14+14=? \rightarrow 14+16=?$  oder  $14+14=? \rightarrow 14+114=? \rightarrow 14+116=?$  oder  $14+1114=?$ ; ... oder  $14+14=? \rightarrow 34+34$  (134+134, 1340+1340, ...)
- $14+2=16 \rightarrow 140+20=?$  oder  $14+10=24 \rightarrow 140+100=240 \rightarrow 140+90=? \rightarrow 140+80=? \rightarrow 240+80=?$  ...
- $14+10$  (9, 8) oder  $14+20$  (19, 18) oder  $14+50$  (49, 48) oder  $14+100$  (99, 98) oder ...



# Rechnen lernen im täglichen Mathetraining

## Verinnerlichte Rechenhandlungen

Unser Ziel ist **verstehendes Rechnen auf der Grundlage verinnerlichter Rechenhandlungen**: nachdem wir in Mathetrainingseinheiten einige Ableitungsaufgaben gelöst haben, beginnen wir oft mit einer Wiederholung: wir decken das Zahlenbild an der Magnettafel mit einem Tuch ab und versuchen dieselben Aufgaben jetzt mit möglichst wenigen Hilfen auf handelnder und ikonischer Ebene zu lösen. Wir thematisieren systematisch Lernfortschritte einzelner Kinder: Kinder sollen realisieren, dass sie immer weniger Hilfen zur Lösung der Aufgabe benötigen. Die Freude ist groß, wenn Kinder sich dessen bewusst werden und ihre Lernerfolge in der Gruppe wiedergespiegelt bekommen.

## Erwerb arithmetischer Kompetenzen

→ Übersicht S. 10, detailliert beschrieben auf S. 46 ff.

Insbesondere **rechenschwächere Kinder** können mit unserer Vorgehensweise **bereits in den ersten Wochen des Anfangsunterrichts** Zahlenbilder als Ausgangspunkt für das Rechnen mit verschiedenen Ableitungsstrategien einsetzen und so **schnell eine Vielzahl arithmetischer Kompetenzen erwerben**:

1. So kann beispielsweise auf der Grundlage der **simultanen bzw. der quasisimultanen Mengenerfassung** der 4, der 10, und der 14 die Vorstellung des Zahlenbildes der „14“ gelernt und dann mit der Zeit assoziativ, also direkt aus dem Gedächtnis abgerufen werden.
2. Kinder erwerben **mathematisches Verständnis für arithmetische Operationen** (Addition, Subtraktion)
3. Kinder lernen **Rechengesetze** kennen: das Kommutativgesetz der Addition, z.B.  $10+4=4+10$  und ev. das Konstanzgesetz der Summe (Strategie: gegenseitiges Verschieben): z.B.  $4+10=14 \rightarrow 5+9=?$ , in Verbindung mit dem Assoziativgesetz:  $4+10=14 \rightarrow (1-1)+(4+10)=14 \rightarrow (4+1)+(10-1)=14 \rightarrow 5+9=14$ .
4. Kinder lernen die **Logik der Beziehungen unseres Stellenwertsystems** zu erfassen und erwerben **Rechenfertigkeiten mit vier Ableitungsstrategien** auf dieser Grundlage im fünften Trainingsfeld.
5. Kinder erwerben **vielfältige prozedurale Fähigkeiten** und Fertigkeiten: sie lernen Rechenwege mit der

Zeit selbstständig zu gehen, d. h. sie lernen Aufgaben selbstständig zu lösen.

Wir wollen mit dieser Auswahl erlernbarer arithmetischer Kompetenzen verdeutlichen, welches Lernpotential das Rechnen mit Zahlenbildern arabischer Zahlen beim Erlernen verstehenden Rechnens für alle Kinder, auch für rechenschwächere, haben kann.

## Einige Hinweise zum Trainingsablauf

(Trainingsschwerpunkte 4 und 5)

### Hinzufügen einer neuen Aufgabe

Sobald die rechenstärksten Kinder ihre aktuell „schwersten“ Aufgaben spontan auf symbolischer Ebene lösen können, bekommen sie von der Lehrer:in sofort neue, interessante Aufgaben im erweiterten Zahlenraum oder in komplexeren Rechenzusammenhängen (→ S. 58).

### Weglassen einer Aufgabe

Sobald die **rechenschwächsten Kinder** nach ein paar Trainingseinheiten die ersten Aufgaben sicher auf symbolischer Ebene lösen können, diese also allmählich „zu leicht“ werden, lassen wir diese Aufgaben mal für ein bis zwei Tage weg, um sie dann aber in einer folgenden Einheit und in größeren Zeitabständen, ev. in höheren Zahlenräumen zu wiederholen.

### Anzahl der Aufgaben in einem Trainingsschwerpunkt

Unsere Erfahrung: drei bis 5 Aufgaben pro Trainingsschwerpunkt sind meist genug. Kinder könnten im Verlauf der Aufgabenserie die Konzentration verlieren, wenn diese Phase zu lange dauert. In diesem Fall können wir leicht Übungsaufgaben aus dem mittleren Bereich weglassen.

### Wiederholungsschleifen: Wiederholung von Trainingsschwerpunkten im Anfangsunterricht der ersten zwei Schuljahre

Lerninhalte aller Bereiche der Zahlenverarbeitung und des Rechnens werden **in immer größer werdenden Zeitabständen wiederholt und erweitert** um basale Fähigkeiten zu sichern und zu erreichen, dass Kinder zunehmend **automatisierte und flüssigere Rechenfertigkeiten bzw. Routinen** entwickeln.

## Trainingsfeld 6 : Zehnerüberschreitung mit der Kraft der Fünf



Alle 100 Basisaufgaben im Zahlenraum bis 20 sind, wie wir gezeigt haben, mit Ableitungsstrategien zu lösen, → Übersicht Seite 41.

Viele Aufgaben sind mit mehreren dieser Strategien zu lösen, so beispielsweise „6+5=?“

- mit der „**Kraft der 5**“:  $5+5=10 \rightarrow 6+5=?$
- mit den „**Zehnerfreunden**“:  $6+4=10 \rightarrow 6+5=?$
- mit der „**Verdoppelung**“:  $6+6=12 \rightarrow 6+5=?$   
oder  $5+5=10 \rightarrow 6+5=?$

Einige wenige Aufgaben sind nur über zwei Ableitungsschritte zu lösen, so ist beispielsweise  $8+5 = 9+4 = 10+3$  mit der Strategie „**Gegenseitiges Verschieben**“ (Konstanz-gesetz der Summe) zu lösen. Das fällt manchen Kindern jedoch nicht leicht.

Daher bieten wir Kindern die Rechentechnik „**Mit der Kraft der 5 über die Zehn**“ als Lösungsstrategie für alle Aufgaben mit Zehnerüberschreitung an. Damit haben sie einen „**Plan B**“ für den Fall, dass ihnen mal keine Ableitungsstrategie zur Lösung einer Aufgabe einfällt.



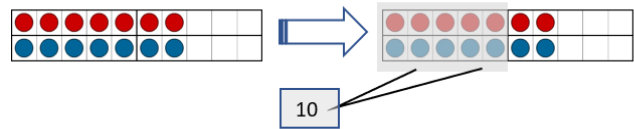
Diese Vorgehensweise erfordert im Unterschied zum Zehnerstoppverfahren weniger Vorwissen (Fünferzerlegung der Zahlen 6, 7, 8, 9, 10), ist anschaulich und viel weniger komplex in der Abfolge der Rechenschritte.

## „Mit der starken 5 über die 10“ - Reihendarstellung ↔ Blockdarstellung

### 1. Addition:

Transformation von der Reihendarstellung in die Blockdarstellung: vom „linearen Zehner“ zum „flächigen Zehner“

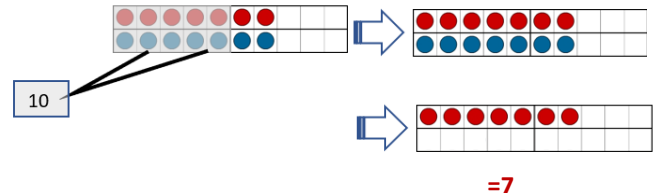
$$7 + 7 = (5+2) + (5+2) = (5+5) + (2+2) = 10 + 4 = 14$$



### 2. Subtraktion:

Transformation von der Block- in die Reihendarstellung: vom „flächigen Zehner“ zum „linearen Zehner“

$$14 - 7 = (10 + 4) - 7 = (5+5) + (2+2) - 7 = (5+2) + (5+2) - 7 = 7 + 7 - 7 =$$



## „Mit der starken 5 über die 10“ mit Händen und Füßen - so machen wir's.

Dieses Rechenverfahren können Kinder leicht erlernen und handlungsbegleitend mit Händen und Füßen beim Lösen von Rechenaufgaben einsetzen.

|     |   |     |   |    |
|-----|---|-----|---|----|
| 8   | + | 8   | = | ?  |
| 5+3 | + | 5+3 | = |    |
| 5+5 | + | 3+3 | = |    |
| 10  | + | 6   | = | 16 |

