

Rechnen lernen im täglichen Mathetraining

Überblick: Rechentraining

Im **Rechentraining** erwerben Kinder im Anfangsunterricht mit **elf Lösungsstrategien** die für verstehendes Rechnen notwendigen Rechenfertigkeiten:

- die drei „klassischen“ **Ableitungsstrategien im Trainingsfeld 4: „die starke 5“, „Zehnerfreunde“ und „Verdoppeln und Halbieren“**. Diese Strategien beruhen auf insgesamt 18 Zahlentripeln.

Leicht zu erlernende Zahlentripel wie „ $1+1=2$ “, „ $2+2=4$ “, „ $3+3=6$ “ oder „ $5+5=10$ “ und „ $10+10=20$ “ lernen Kinder im Unterricht nebenbei. Wir konzentrieren uns im **vierten Trainingsfeld somit auf das Erlernen zehn ausgewählter Zahlentripel** als Grundlage für das Rechnen mit Ableitungsstrategien.

- **vier weitere Ableitungsstrategien im fünften Trainingsfeld** auf der Grundlage arabischer Zahlen und der Fähigkeit, sich diese simultan als „Zahlenbild“ vorstellen zu können (Rechnen lernen auf der Basis des Aufbaus bzw. der Logik unseres Stellenwertsystems).

- die Rechentechnik **„Mit der Kraft der 5 über die 10“** im sechsten Trainingsfeld: damit haben Kinder noch eine elfte Lösungsstrategie, die ihnen als „Plan B“, helfen kann, wenn ihnen mal keine der zehn Ableitungsstrategien zum Lösen einer Aufgabestellung in konkreten Rechensituationen einfällt.

- **Ableitungen auf der Basis dreier Rechengesetze:** das Assoziativgesetz („**Zahl Zerlegen**“), das Kommutativgesetz („**Tauschaufgaben**“) und das Konstanzgesetz der Summe („**Gegenseitiges Verschieben**“) werden häufig in Kombination mit anderen Lösungsstrategien eingesetzt und parallel in verschiedene Übungssequenzen in den Trainingsfeldern 4 bis 6 einbezogen.

Trainingsfeld 4: Ableitungen auf der Grundlage von Zahlentripeln

Rechenschwächere Kinder brauchen für sie **überschaubare Lernsituationen** (→ S. 53) und **längere Erarbeitungs- und Übungsphasen**, um neue Strukturen zu erfassen und sich merken zu können:

So steht ein Zahlentripel im vierten Trainingsfeld oft über mehrere Tage hintereinander, zu Beginn des Anfangsunterrichts manchmal auch über Wochen im Mittelpunkt des täglichen Mathetrainings.

Michael Gaidoschik (2009, 6) schreibt dazu: „Alle Kinder können diese Strategien verstehen, aber manche benötigen dabei gezielte Unterstützung. **Sie müssen Zeit haben, sich erst mal (und sei es über Wochen) auf nur eine Strategie einzulassen...** . Wenn ein Kind sich eine bestimmte Strategie zu eigen gemacht hat, kann es die nächste lernen“.

Wir verlassen einen Trainingsschwerpunkt in aller Regel erst dann, wenn die rechenschwächsten Kinder der Gruppe selbstständig erste Ableitungsaufgaben lösen können bzw. erfolgreich eine neue Strategie erlernt haben und ausreichend Zeit zum Üben hatten.

Wir können rechenschwächeren Kindern bei unserer Vorgehensweise problemlos die Zeit geben, die sie für das Erlernen jeder einzelnen Ableitungsstrategie brauchen, da wir parallel allen anderen Kindern, auch den rechenstärksten, mit derselben Strategie interessante und spannende Aufgabestellungen im nach oben offenen Zahlenraum anbieten können.

Erfahrungsgemäß gehen uns auf diese Weise die rechenstärksten Kinder leistungsmäßig mit der Zeit förmlich „durch die Decke“ – sie sind intelligent und hochmotiviert und nehmen es am Ende der zweiten Klasse im Kopfrechnen mit Additions- und Subtraktionsaufgaben auch gerne mit jedem anderen Kind in unserer Schule auf.

Aufgabenpool: „ $6+4=10$ “

Fürs Mathetraining finden wir im nach oben offenen Zahlenraum **auf der Basis eines Zahlentripels eine Vielzahl von Aufgabestellungen**. Es gibt, wie in den Tabellen auf der nächsten Seite dargestellt, im Hunderterraum, wenn man zusätzlich mögliche Tauschaufgaben berücksichtigt, mehrere hundert, im Tausenderraum mehrere tausend mögliche Trainingsaufgaben, um das Rechnen mit Ableitungen zu erlernen und zu üben.

Neben der bloßen Anzahl von möglichen Aufgaben ist der **Motivationscharakter** von Aufgaben entscheidend: da dürfen die dafür so wichtigen „großen Zahlen“ nicht fehlen. Daher haben wir eine kleine Auswahl der unzähligen Ableitungsmöglichkeiten des Zahlentripels im ZR über 1'000 in einer zweiten Tabelle dargestellt.

Die **Aufgabenschwierigkeit hängt nur bedingt von der Zahlengröße ab**: Aufgaben mit großen Zahlen wie „ $6'000+4'000=?$ “ können Kinder in unserem Unterricht, in dem wir von Anfang an im Zahlenraum bis etwa 10'000 mit dem ZSM arbeiten, nach kurzer Zeit über die handelnde und bildliche Ebene direkt auf dem Weg $6+4=10 \rightarrow 6'000+4'000=10'000$ verstehen und lösen.

Aufgabestellungen in komplexeren Rechenzusammenhängen wie „ $800-64$ “ über den Weg

- $6+4=10 \rightarrow 10-6=4 \rightarrow 100-60=40 \rightarrow 800-60=740$
→ und $10-4=6 \rightarrow 40-4=36$ und dann: $800-64=736$

stellen eine anspruchsvolle Herausforderung für mathematisch talentierte Kinder dar.



6+4=10	Ableitungsmöglichkeiten: Nachbar- und additive Analogiebeziehungen			
	Kernaufgabe, Umkehr- und Analogieaufgaben	Nachbar-aufgaben	Analogieaufgaben additiv „+10(100)“	Nachbar- von Analogieaufgaben
Zahlenraum bis 1000	1a) Kernaufgabe („Arithmetisches Faktum“) 6 + 4 = 10	6+5=? 6+3=? 7+4=? 5+4=?	16+4=?, 26+4=?, usw.	16+5=?, 26+5=?, ... 16+3=?, 26+3=?/... 17+4=?, 27+4=?, ... 15+4=?, 25+4=?, ...
	1b) Umkehraufgabe 10 - 4 = 6 (ev. auch Umkehraufgabe 10-6=4 und Ergänzungsaufgaben 6+?=10, 4+?=10)	10-5=? 10-3=? 11-4=? 9-4=?	20-4=?, 30-4=?, usw.	20-5=?, 30-5=?, ... 20-3=?, 30-3=?, ... 21-4=?, 31-4=?, ... 19-4=?, 29-4=?, ...
	2a) Analogieaufgabe additiv „+100“ 106 + 4 = 110	106+5=? 106+3=? 107+4=? 105+4=?	116+4=?, 126+4, ... 216+4=?, 226+4,... usw.	[106 (206,...) +10 (20,...)] + 5=? [106 (206,...) + (10,20,...)] + 3=? [107 (207,...) + (10,20,...)] + 4=? [105 (205,...) + (10,20,...)] + 4=?
	2b) Umkehraufgabe zur Analogieaufgabe additiv „+100“ 110 - 4 = 106 (ev. 110-6=40, 106+?=110, 104+?=110)	110-5=? 110-3=? 111-4=? 109-4=?	120-4=?, 130-4=?, ... 220-4=?, 230-4=?, ... usw.	[110 (210,...) +10 (20,...)] -5=? [110 (210,...) + (10,20,...)] -3=? [111 (211,...) + (10,20,...)] -4=? [109 (209,...) + (10,20,...)] -4=?
6+4=10	Ableitungsmöglichkeiten: Nachbar- und multiplikative und additive Analogiebeziehungen			
	Kernaufgabe, Umkehr- und Analogieaufgaben	Nachbar-aufgaben	Analogieaufgaben „+100(1'000,10'000)“	Nachbar- von Analogieaufgaben
Zahlenraum bis 1000	1a) Analogieaufgabe multiplikativ „·10“ 60 + 40 = 100	60+50=? 60+30=? 70+40=? 50+40=?	160+40=?, 260+40=?, usw....	160+50=?, 260+50=?, ... 160+30=?, 260+30=?,... 170+40=?, 270+40=?, ... 150+40=?, 250+40=?, ...
	1b) Umkehraufgabe zu Analogieaufgaben „·10“ 100 - 40 = 60 (ev 100-60=40, 60+?=100, 40+?=100)	100-50=? 100-30=? 110-40=? 90-40=?	200-40=?, 300-40=?, usw.	200-50=?, 300-50=?, ... 200-30=?, 300-30=?, ... 210-40=?, 310-40=?, ... 190-40=?, 290-40=?, ...
Zahlenraum 1000 plus	2a) Analogieaufgabe multiplikativ „·100“ 600 + 400 = 1'000	600+500=? 600+300=? 700+400=? 500+400=?	1'600+400=?, 2'600+400=?, usw. ...	1'600+500=?, 2'600+500=?, ... 1'600+300=?, 2'600+300=?,... 1'700+500=?, 2'700+500=?, ... 1'500+500=?, 2'500+500=?, ...
	2b) Umkehraufgabe 1'000 - 400 = 600 (ev 1000-600=400, 600+?=1000, 400+?=1000)	1'000-500=? 1'000-300=? 1'100-400=? 900-400=?	2'000-400=?, 3'000-400=?, usw. ...	2'000-500=?, 3'000-500=?, ... 2'000-300=?, 3'000-300=?, ... 2'100-400=?, 3'100-400=?, ... 1'900-400=?, 2'900-400=?, ...
	3a) Analogieaufgabe multiplikativ „·1'000“(„·1T“) 6T + 4T = 10T	6T + 5T = ? 6T + 3T = ? 7T + 4T = ? 5T + 4T = ?	16T + 4T = ?, 26T + 4T = ?, usw. ...	16T + 5T = ?, 26T + 5T = ?, ... 16T + 3T = ?, 26T + 3T = ?, ... 17T + 4T = ?, 27T + 4T = ?, ... 15T + 4T = ?, 25T + 4T = ?, ...
	3b) Umkehraufgabe 10T - 4T = 6T (ev. 10T-6T=?, 6T+?=10T, 4T+?=10T)	10T - 5 T = ? 10T - 3 T = ? 11T - 4T = ? 9T - 4T = ?	20T - 4T = ?, 30T - 4T = ?, usw. ...	20T -5T = ?, 30T - 5T = ?, ... 20T -3T = ?, 30T - 3T = ?, ... 21T -4T = ?, 31T - 4T = ?, ... 19T -4T = ?, 29T - 4T = ?, ...

Rechnen lernen im täglichen Mathetraining

Trainingsfeld 5: Ableitungen auf der Grundlage arabischer Zahlen

Manche Kinder brauchen wesentlich mehr Zeit und Übung als andere, um sich Zahlenbilder arabischer Zahlen mühelos vorstellen zu können. Das führt im traditionellen Unterricht häufig dazu, dass diese Kinder Ableitungsstrategien auf der Grundlage von Zahlenbildern nicht erlernen können!

Wir versuchen alles zu tun, um möglichst günstige Bedingungen zu schaffen, damit alle Kinder in den ersten Schulwochen lernen **unser Stellenwertsystem zu verstehen, damit wir** auf dieser Grundlage gemeinsam ins Rechnen kommen können. **Wir drehen daher gleichzeitig an vier Stellschrauben:**

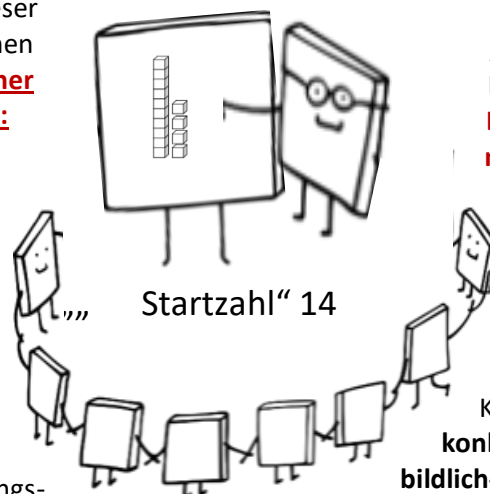
1. Kinder lernen vom ersten Schultag an in jedem Mathetraining **das Zählen mit paralleler Zahl-Mengen-Zuordnung** auf bildlicher und handelnder Ebene und bekommen damit bereits beim Zählen einen Zugang zu unserem Stellenwertsystem.
2. Kinder üben im zweiten Trainingsfeld des Zahlentrainings systematisch die Zahl-Mengen-Zuordnung im offenen Zahlenraum auf vielfältige Art und Weise, was sich weiterhin sehr günstig auf die Leistungsfähigkeit der Kinder in diesem Bereich auswirkt.
3. Wir bieten Kindern auch im fünften Trainingsfeld **überschaubare Lernsituationen**: wie wir im vierten Trainingsfeld Kindern manchmal über Tage und Wochen Zeit geben, das Rechnen mit einer einzigen Strategie zu erlernen und zu üben, schaffen wir im fünften Trainingsfeld überschaubare Lernsituationen, indem wir **im Rechentraining eines Tages nur mit einer einzigen arabischen Zahl bzw. dessen veranschaulichtem Zahlenbild als „Startzahl“ ins Rechnen kommen** (→ Beispiel Seite 29).

Dabei nehmen wir immer eine Zahl, deren einzelne Stellenwerte Kinder schnell simultan erfassen können (z.B. 14, 32, 34, 124 etc.).

Mit dieser Vorgehensweise nehmen wir Kindern die Arbeit ab bzw. **wir vermeiden die Überforderung, dass sich Kinder permanent, also mit jeder neuen Aufgabe, neue Zahlenbilder vorstellen müssen**, bevor sie mit dem Rechnen beginnen können.

Das Arbeitsgedächtnis der Kinder wird auf diese Weise wesentlich entlastet, Kinder können sich auf das Erfassen der Aufgabestellung und das Erlernen des Rechnens mit Ableitungsstrategien und nicht auf das permanente Erzeugen von Zahlenbildern konzentrieren!

4. Da wir die „Startzahl“ im Mathetraining für alle Kinder sichtbar mit dem Zehnersystemmaterial (oder einem anderem zehnerbasierten Material) an unserer Magnettafel veranschaulichen, können **Kinder diese „Startzahl“ sehr leicht als Ausgangspunkt fürs Rechnen nutzen.**



„Sehendes Rechnen“

Kinder können im Mathetraining **den Lösungsprozess von Aufgaben „live“ mitverfolgen**, indem Lehrer:innen zuerst alle Aufgaben auf sprachlich-symbolischer Ebene stellen, dann die Aufgabestellung mehrfach wiederholen und dabei so lange Hilfen auf ikonischer und zum Schluss auf handelnder Ebene geben, bis alle Kinder eine Lösungs idee haben. **Wir konkretisieren dabei den Lösungsweg auf bildlich-handelnder Ebene an der Magnettafel vor den Augen der Kinder:** dieses gemeinsame Rechnen nennen Kinder **„Sehendes Rechnen“**.

Indem Rechenaufgaben wiederholt konkretisiert und abstrahiert werden, wird nach J. Bruner ein tiefes Verstehen der mathematischen Zusammenhänge erreicht (Hilgers, A., 2018).

Beispiel Startzahl 14: mit der „14“ ins Rechnen kommen“

Wir kommen auf der Grundlage einer arabischen Zahl als „Startzahl“ bereits in den ersten Schulwochen im Rechentraining auf ganz unterschiedliche Art und Weise ins Rechnen, was wir am Beispiel der „14“ zeigen.

1. Das Zahlenbild der „14“: Ausgangspunkt für das Rechnen mit vier Ableitungsstrategien

1. **„um eins (zwei, drei) mehr oder weniger“** $14 \pm 1(2,3)$
2. **„Rechnen mit der 10, 100, 1000...“** $14 + 10$ (20, 100, 200, 1000, ...) und $14 - 10$
3. **„8er-9er-Trick“** 14 ± 10 (9, 8, 11, 12)
(Nachbaraufgaben von „Rechnen mit der 10“)
4. **„Fast alles Abräumen“** $14 - 14 = 0 \rightarrow 14 - 13 = ?$ und $14 - 12 = ?$

Ableitungen auf der Grundlage arabischer Zahlen (Verständnis des Zahlensystems)

Aufgaben verstehen und lösen – konkretisieren und abstrahieren

Symbolische Ebene symbolisch-verbal oder symbolisch-visuell	Bildliche Ebene Ausgangspunkt: ein Zahlenbild	Handelnde Ebene konkrete Rechenhandlungen	Bildliche Ebene Rechenergebnis auf bildlicher Ebene	Symbolische Ebene Übersetzung des Ergebnisses auf die symbolische Ebene
„Vierzehn plus eins?“ „um eins (zwei, drei) mehr oder weniger“	Ein Zehner und vier Einer	„plus 1“ heißt ... „einen Einer dazu-tun“	Ein Zehner und fünf Einer	Ergebnis: „15“ „Vierzehn plus eins ist fünfzehn.“
„Vierzehn minus zehn?“ „Rechnen mit der 10, 100, 1000 ...“	Ein Zehner und vier Einer	„minus 10“ heißt ... einen Zehner „weg-nehmen“	Vier Einer	Ergebnis: „4“ „Vierzehn minus zehn ist vier.“
„Vierzehn minus neun?“ „8er-9er-Trick“	Ein Zehner und vier Einer	„minus 9“ heißt ... „einen Zehner weg-nehmen“ und „einen Einer „dazu-tun“	Fünf Einer	Ergebnis: „5“ „Vierzehn minus neun ist fünf.“
„Vierzehn minus dreizehn?“ „Fast alles Abräumen“	Ein Zehner und vier Einer	„minus 13“ heißt ... „einen Einer liegen-lassen und den Rest „abräumen“: einen Zehner und drei Einer „weg-nehmen“	Ein Einer	Ergebnis: „1“ „Vierzehn minus dreizehn ist eins.“

2. Das Zahlentripel „10+4=14“: Ausgangspunkt für das Rechnen mit einem Zahlentripel

1. Umkehr- und Ergänzungsaufgaben:

 $10+4=14 \rightarrow 14-4=?$ ($14-10=?$, $10+?=14$, $4+?=14$)

2. Nachbараufgaben:

 $14-4=10 \rightarrow 14-5=?$ oder $14-4=10 \rightarrow 14-3=?$, ...

3. Analogieaufgaben: wie $14-4=10 \rightarrow 140-40=?$

4. Nachbar- von Analogieaufgaben: wie z.B.

 $14-4=10 \rightarrow 140-40=100 \rightarrow 140-50=?$ oder ...

 $14+10=24 \rightarrow 140+100=240 \rightarrow 140+90=?$

5. Rechengesetze: Kommutativgesetz: Tausch-aufgaben zu allen oben beschriebenen Umkehr-, Ergänzung-, Nachbar- und Analogieaufgaben $10+4=4+10$; Konstanzgesetz von Summen: z.B. $10+4=9+5=8+6$ oder ...

3. Das Zahlenbild der „14“: Ausgangspunkt um mit Aufgaben mit mehreren Strategien parallel ins Rechnen zu kommen, z.B. :

- $14+10$ (11,12, ...) oder $14+20$ (21,22, ...) oder $14+30$ (31, 51, 71, ...) oder $14+100$ (110, 111, 112, 131, 132, ...) oder $14+1000$ (1100, 1110, 1111, ...) oder $14+1000$ (1001, 1002, ...) oder ...
- oder $14+14=? \rightarrow 14+16=?$ oder $14+14=? \rightarrow 14+114=? \rightarrow 14+116=?$ oder $14+1114=?$; ... oder $14+14=? \rightarrow 34+34$ (134+134, 1340+1340, ...)
- $14+2=16 \rightarrow 140+20=?$ oder $14+10=24 \rightarrow 140+100=240 \rightarrow 140+90=? \rightarrow 140+80=? \rightarrow 240+80=?$...
- $14+10$ (9, 8) oder $14+20$ (19, 18) oder $14+50$ (49, 48) oder $14+100$ (99, 98) oder ...

Rechnen lernen im täglichen Mathetraining

Verinnerlichte Rechenhandlungen

Unser Ziel ist **verstehendes Rechnen auf der Grundlage verinnerlichter Rechenhandlungen**: nachdem wir in Mathetrainingseinheiten einige Ableitungsaufgaben gelöst haben, beginnen wir oft mit einer Wiederholung: wir decken das Zahlenbild an der Magnettafel mit einem Tuch ab und versuchen dieselben Aufgaben jetzt mit möglichst wenigen Hilfen auf handelnder und ikonischer Ebene zu lösen. Wir thematisieren systematisch Lernfortschritte einzelner Kinder: Kinder sollen realisieren, dass sie immer weniger Hilfen zur Lösung der Aufgabe benötigen. Die Freude ist groß, wenn Kinder sich dessen bewusst werden und ihre Lernerfolge in der Gruppe wiedergespiegelt bekommen.

Erwerb arithmetischer Kompetenzen

→ Übersicht S. 10, detailliert beschrieben auf S. 46 ff.

Insbesondere **rechenschwächere Kinder** können mit unserer Vorgehensweise **bereits in den ersten Wochen des Anfangsunterrichts** Zahlenbilder als Ausgangspunkt für das Rechnen mit verschiedenen Ableitungsstrategien einsetzen und so **schnell eine Vielzahl arithmetischer Kompetenzen erwerben**:

1. So kann beispielsweise auf der Grundlage der **simultanen bzw. der quasisimultanen Mengenerfassung** der 4, der 10, und der 14 die Vorstellung des Zahlenbildes der „14“ gelernt und dann mit der Zeit assoziativ, also direkt aus dem Gedächtnis abgerufen werden.
2. Kinder erwerben **mathematisches Verständnis für arithmetische Operationen** (Addition, Subtraktion)
3. Kinder lernen **Rechengesetze** kennen: das Kommutativgesetz der Addition, z.B. $10+4=4+10$ und ev. das Konstanzgesetz der Summe (Strategie: gegenseitiges Verschieben): z.B. $4+10=14 \rightarrow 5+9=?$, in Verbindung mit dem Assoziativgesetz: $4+10=14 \rightarrow (1-1)+(4+10)=14 \rightarrow (4+1)+(10-1)=14 \rightarrow 5+9=14$.
4. Kinder lernen die **Logik der Beziehungen unseres Stellenwertsystems** zu erfassen und erwerben **Rechenfertigkeiten mit vier Ableitungsstrategien** auf dieser Grundlage im fünften Trainingsfeld.
5. Kinder erwerben **vielfältige prozedurale Fähigkeiten** und Fertigkeiten: sie lernen Rechenwege mit der Zeit selbstständig zu gehen, d. h. sie lernen Aufgaben selbstständig zu lösen.

Wir wollen mit dieser Auswahl erlernbarer arithmetischer Kompetenzen verdeutlichen, welches Lernpotential das Rechnen mit Zahlenbildern arabischer Zahlen beim Erlernen verstehenden Rechnens für alle Kinder, auch für rechenschwächere, haben kann.

Einige Hinweise zum Trainingsablauf

(Trainingsschwerpunkte 4 und 5)

Hinzufügen einer neuen Aufgabe

Sobald die rechenstärksten Kinder ihre aktuell „schwersten“ Aufgaben spontan auf symbolischer Ebene lösen können, bekommen sie von der Lehrer:in sofort neue, interessante Aufgaben im erweiterten Zahlenraum oder in komplexeren Rechenzusammenhängen (→ S. 58).

Weglassen einer Aufgabe

Sobald die **rechenschwächsten Kinder** nach ein paar Trainingseinheiten die ersten Aufgaben sicher auf symbolischer Ebene lösen können, diese also allmählich „zu leicht“ werden, lassen wir diese Aufgaben mal für ein bis zwei Tage weg, um sie dann aber in einer folgenden Einheit und in größeren Zeitabständen, ev. in höheren Zahlenräumen zu wiederholen.

Anzahl der Aufgaben in einem Trainingsschwerpunkt

Unsere Erfahrung: drei bis 5 Aufgaben pro Trainingsschwerpunkt sind meist genug. Kinder könnten im Verlauf der Aufgabenserie die Konzentration verlieren, wenn diese Phase zu lange dauert. In diesem Fall können wir leicht Übungsaufgaben aus dem mittleren Bereich weglassen.

Wiederholungsschleifen: Wiederholung von Trainingsschwerpunkten im Anfangsunterricht der ersten zwei Schuljahre

Lerninhalte aller Bereiche der Zahlenverarbeitung und des Rechnens werden **in immer größer werdenden Zeitabständen wiederholt und erweitert** um basale Fähigkeiten zu sichern und zu erreichen, dass Kinder zunehmend **automatisierte und flüssigere Rechenfertigkeiten bzw. Routinen** entwickeln.