Rechnen lernen: Rechentechniken und Ableitungsstrategien

Wir analysieren im Folgenden mögliche Lösungsstrategien für das Kopfrechnen im Bereich der Addition und Subtraktion unter verschiedenen Fragestellungen:

1. Welche grundsätzlichen Vorgehensweisen liegen einzelnen Lösungsstrategien zugrunde?
2. Welches Vorwissen brauchen Kinder um einzelne Lösungsstrategien zu erlernen?
3. Welche Anforderungen sind mit dem Erlernen und der Anwendung von Strategien verbunden?
4. Welche mathematischen Kompetenzen erwerben Kinder mit dem Erlernen bestimmter Strategien?

Betrachtet man alle möglichen Lösungsstrategien, kann man zunächst zwei große Kategorien erkennen: es gibt Strategien, die universell für alle oder zumindest für einen großen Teil aller Kopfrechenaufgaben einsetzbar sind und bei denen man beim Rechnen nach einer festen Reihenfolge von Rechenschritten, nach einem **„Rechenrezept“,** vorgeht. Wir bezeichnen diese Strategien als **„Rechentechniken“**.

Bei allen anderen Lösungsstrategien werden Aufgabenlösungen von etwas Bekanntem über mathematische Beziehungen oder Rechengesetze abgeleitet und daher als **„Ableitungsstrategien“** bezeichnet**.** Es gibt grundsätzlich drei Möglichkeiten, auf diese Weise Aufgabenlösungen näher zu kommen. Wir können

- von **arithmetischen Fakten ableiten,** d.h. Kinder lösen Aufgaben auf der Grundlage auswendig gelernter Zahlentripel der Form a+b=c, die zuvor auf der Grundlage des simultanen Erkennens bestimmter strukturierter Mengen erlernt wurden (Trainingsfeld 4).
- ausgehend **von Zahlenbildern arabischer Zahlen** mit der Kenntnis unseres Zahlsystems Aufgaben lösen (Trainingsfeld 5) .
- **Rechengesetze anwenden** und meist in Kombination mit den in den Trainingsfeldern 4, 5 und 6 beschriebenen Strategien Aufgaben lösen, z.B. 3+8=? Kommutativgesetz: 3+8=8+3 und Nachbaraufgabe 8+2=10→8+3=? oder Beispiel: 9+14=? Kommutativgesetz: 9+14=14+9 und Nachbaraufgabe: 14+10-1=23 oder die Lösung über das Konstanzgesetz von Summen: 9+14=10+13=13+10=23

Um der Beantwortung oben gestellter Fragestellungen näher zu kommen, haben wir dreizehn mögliche Lösungsstrategien vier Kategorien zugeordnet.

Drei „Rechentechniken“ als universelle Lösungsstrategien

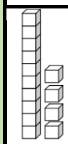
Rechentechnik	Vorwissen / Anforderungen	Mathematisches Verständnis / Erlernen / Anwendung	Beispiel
„Zählendes Rechnen“ Einfach zu erlernende, anspruchsarme Rechentechnik / Universelle Lösungsstrategie im Zahlenraum bis 20	Zahlenreihe vorwärts- und rückwärts zählen können (mit Hilfe der Finger)	„Plus“ bedeutet Vorwärtszählen, „Minus“ bedeutet Rückwärtszählen Zählstrategien: „Count all“, „Count on“, „Count min“	6+9=?, z.B. mit der Strategie „Count min“ mit Hilfe der Finger: zuerst **6+9=9+6**, dann: „10, 11, 12, 13, 14, **15“**
„Zehnerstoppverfahren“ (**→S. 36 ff.)** Anspruchsvolle mehrstufige Rechentechnik / universelle Lösungsstratege für alle Aufgaben mit Zehnergang	45 Zahlzerlegungen auswendig lernen, hohe Anforderungen an das Langzeitgedächtnis!	Verständnis für die Reihenfolge von Zerlegungs- und Rechenschritten	6+9=? 6+x =10, → x=4 4+y = 9, → y=5 (6+x)+y = (6+4)+5 = 15
	große Anforderungen an das Arbeitsgedächtnis bei der Ausführung des Rechenverfahrens		
„Zehnerübergang mit der Kraft der 5“ Anschauungs- und handlungsorientierte Rechentechnik / universelle Lösungsstrategie für alle Aufgaben mit Zehnerübergang	5er-Zerlegung der Zahlen 6 bis 10 auf der Grundlage von Verständnis auswendig lernen	5er-Zerlegung, Assoziativität, leicht auf handelnder und bildlicher Ebene nachvollziehbar	6+9=? 6+9 =(5+1)+(5+4) = 5+1+5+4 = (5+5)+(1+4)=10+5=15

Theoretischer Hintergrund des Strategieunterrichts

Drei Ableitungsstrategien auf der Grundlage von Zahlentripeln

Strategiename	1. **Vorwissen / Anforderungen:** Zahlvorstellung erwerben, arithmetische Fakten auswendig lernen, Ableiten über verschiedene Zahl- und Aufgabebeziehungen 2. **Erwerb mathematischen Verständnisses** für arithmetische Fakten, Umkehr- und Ergänzungsaufgaben, Nachbar- und Analogiebeziehungen, … 3. **Erwerb prozeduraler Fähigkeiten** auf unterschiedlichsten Ableitungswegen			
	Kernaufgabe → Umkehr- und Ergänzungsaufgaben	**Kernaufgabe → Nachbar-aufgaben**	**Kernaufgabe → Analogie-aufgaben**	**Kernaufgabe → Nachbar- von Analogieaufgaben**
„Starke Fünf“	**„5+3=8“ →** 8-5=?, 8-3=? … 5+?=8, 3+?=8	**„5+3=8“ →** 6+3=? 4+3=? …	**„5+3=8“ →** 15+3=? 50+30==?	**„5+3=8“ →** **50+30=? →** 60+30=? **500+300=800 →** 600+300=?, …
„Zehnerfreunde“	**Tausende von Ableitungsmöglichkeiten im nach oben offenen Zahlenraum** am Beispiel des Zahlentripels „6 + 4 =10“ → **Übersicht auf Seite 27!**			
„Verdoppeln und halbieren“	**„6+6=12“ →** 12-6=? und 6+…=12	**„6+6=12“ →** 6+7=? und 6+5=?	**„6+6=12“ →** 16+6=? und 60+60=?	**„6+6=12“ →** 60+60=? → 60+70=? **600+600=1200 →** 600+700=?, …

Vier Ableitungsstrategien auf der Grundlage des Zahlbildungsprinzips

Strategiename	1. **Vorwissen / Anforderungen:** Zahlvorstellung, das Stellenwertsystem als Ausgangspunkt für das Rechnen mit vier Ableitungsstrategien nutzen können 2. **Erwerb mathematischen Verständnisses** für das Stellenwertsystem und vier Ableitungsstrategien 3. **Erwerb prozeduraler Fähigkeiten** auf unterschiedlichsten Ableitungswegen		
	 **Startzahl → Nachbar-aufgaben**	**Startzahl → Analogieaufgaben „+“** **a + (100, 1000,)**	**Startzahl → Analogieaufgaben „•“** **(a • 10, 100, 1000 …)**
„Um 1,2,3 mehr oder weniger“	**14 →** 14±1=? 14±2=? …	**14 ±1,2,3= →** 114 (214, …, 1014, …) ±1,2,3=?	**14 ±1,2,3= →** 140 (1400) ±10 (20, 100)=?
„Rechnen mit der 10“	**14 →** 14±10=? und 14±20=? , …	**14±10= →** 114±10=? und 114±20=? , …	**14±10= →** 140±100=?→140±200=?→…
„8er,9er-Trick“ (Nachbaraufgaben von „Rechnen mit der 10“)	**14±10= →** 14 ± 9 (8,11 oder 12)=? 14 ±19 (18,21 oder 22)=?	**14±10= → 114±10= →** 114+9 (8, 11,12)=? 114+19 (18, 21,22)=?	**14±10= → 140±100= →** 140+90 (80, 110,120)=? 140+190(180, 210,220)=?
„Fast alles Abräumen“ („Kleiner Unterschied“)	**14-14=0 →** 14-13=? und 14-12=? …	**114-114=0 →** 114-113=? und 114-112=?	**140-140=0 →** 140-130=? und 140-120=?

Theoretischer Hintergrund des Strategieunterrichts

Drei Ableitungsstrategien mit der Anwendung von Rechengesetzen häufig in Verbindung mit der Anwendung anderer Ableitungsstrategien, → Masterplan S. 15			
Strategiename	1. **Vorwissen / Anforderungen:** Zahlvorstellung, drei Rechengesetze anwenden 2. **Erwerb mathematischen Verständnisses** für drei Rechengesetze im Bereich der Addition und Subtraktion, u.a. Erwerb von Verständnis für Zahlzerlegungen, … 3. **Erwerb prozeduraler Fähigkeiten** insbesondere für verschiedene Zahlzerlegungen		
	„Tauschaufgaben“ Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)	**„Zahl Zerlegen“** **und neu zusammensetzen** Assoziativgesetz: alle Reihenfolgen führen zum gleichen Ergebnis	**„Gegenseitiges Verschieben“** Konstanzgesetz der Summe (Ausgleichsgesetz)
„Starke 5“	**2+5=?** 2+5=**5+2**=7	**8+8=?** **5+3+5+3**= 5+5+3+3=10+6=16	**4+3=?** 4+3=5+2=7
Zehnerfreunde“	**3+7=?** 3+7=**7+3**=10	**16+5=?** 10+**6+4**+1=10+10+1=21	
„Verdoppeln und Halbieren“	---	**8+8=? → 5+3+5+3**= **5+5**+3+3=10+6=16	**8+6=?** 8+6=7+7=14
„um 1,2 mehr oder weniger“	**2+14=?** 2+14=**14+2**=16	**14+2= ?** 10+**4+2**=10+6=16	**8+4=?** 8+4=9+3=10+2=12
„Rechnen mit der 10 (100, …)“	**10+14=?** 10+14=**14+10**=24	**34+10=?** 30+4+10=**30+10**+4=40+4=44	**15+9=?** 15+9=14+10=24
„8er, 9er-Trick“	**8+14=?** 8+14=14+8, dann **14+10**=24 **→14+8**=22=22	**14+11=?** 10+4+10+1=10+10+**4+1**=20+5=25	**14+8=?** 14+8=13+9=12+10=22
„Abräumen“	**Die oben genannten drei Rechengesetze gelten nicht im Bereich der Subtraktion!**		

Die drei auf Seite 43 dargestellten **Rechentechniken** unterscheiden sich untereinander stark in Bezug auf das nötige Vorwissen und die intellektuellen Anforderungen, die verschiedene Verfahren an das Erlernen und die Durchführung stellen.

Das zählende Rechnen ist einfach zu erlernen und universell in einem begrenzten Zahlenraum anwendbar. Kinder können mit dieser Technik Aufgaben ohne Verständnis mathematischer Zusammenhänge lösen.

Mit den beiden anderen Rechentechniken lassen sich alle Aufgaben mit Zehnerübergang lösen. Ein Verfahren beruht auf der Zehnerzerlegung, ist intellektuell sehr anspruchsvoll, das andere auf der Fünferzerlegung, bietet Kindern auf anschauungs- und handlungsorientierter Ebene leichten Zugang und ist damit auch für rechenschwächere Kinder leicht zu erlernen.

Wir unterscheiden zehn Ableitungsstrategien. Kinder kommen auf der Grundlage bekannter Zahlensätze, der Kenntnis unseres Zahlsystems oder von Rechengesetzen ins Rechnen. Beim Erlernen des Rechnens über jeden dieser drei Zugänge erlernen Kinder auf der Grundlage basisnumerischen Wissens nicht nur das Kopfrechnen, sondern auch das Verständnis für unterschiedliche mathematische Zusammenhänge.

Wir beschreiben in der Folge im Einzelnen, welche arithmetischen Kompetenzen Kinder im basisnumerischen Bereich und im Bereich des Rechnens mit Ableitungsstrategien erwerben können.